

ЗМІСТ

Стор.

1. Літнарівич Р.М. Дослідження точності апроксимації залежності магнітного моменту Землі від широти методом статистичних випробувань Монте Карло. Частина 1. МЕГУ, Рівне ,2006,-45 с.....1-45

2. Літнарівич Р.М. Встановлення зв'язку між географічною і геомагнітною системами координат. Частина 2..МЕГУ, Рівне,2006,-47 с.....1-47

3. Берник Р.О. Побудова і дослідження математичної моделі залежності магнітного моменту Землі від широти методом статистичних випробувань Монте Карло. Апроксимація поліномом третього степеня. Модель ПГБ10-201.МЕГУ, Рівне,2010,-62 с.....1-62

4. Гомечко О.І. Побудова і дослідження математичної моделі залежності магнітного моменту Землі від широти методом статистичних випробувань Монте Карло. Апроксимація поліномом третього степеня. Модель ПГБ10-204.МЕГУ, Рівне,2010,-62 с.....1-62

5. Доукіна О.І. Побудова і дослідження математичної моделі залежності магнітного моменту Землі від широти методом статистичних випробувань Монте Карло. Апроксимація поліномом третього степеня. Модель ПГБ10-206.МЕГУ, Рівне,2010,-62 с.....1-62

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇН
МІЖНАРОДНИЙ ЕКОНОМІКО-ГУМАНІТАРНИЙ

УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ АКАДЕМІКА
СТЕПАНА ДЕМ'ЯНЧУКА

Р.М.ЛІТНАРОВИЧ

НАУКОВА ШКОЛА МЕГУ

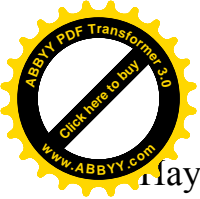
**КОНСТРУЮВАННЯ І ДОСЛІДЖЕННЯ
МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ**

МОНОГРАФІЇ МОЛОДИХ ВЧЕНИХ

КНИГА 25



Рівне, 2010



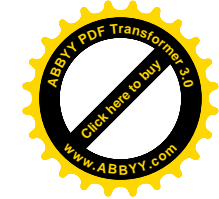
Наукова школа забезпечує переважаючий і проникливий інтелект, здатний до стійкої і довготривалої розумової концентрації. Розвиває живий і діяльний спосіб мислення, дає можливість порівняно легко вирішувати самі складні проблеми. Придає віру в свої сили, розсудливість, витримку, проникливість і дипломатичність. Робота проходить під символом ПОНЯТЛИВОСТІ.

Молоді вчені розглядають існуючі ідеї, роздумують над ними, враховують і застосовують на практиці все те, що було поза увагою. Невдачі не лякають їх, тому що вони знають : Успіх приходить після проробки багатьох конкуруючих варіантів. Вони досягають мети і не піддаються сумнівам. Робота проходить під символом ДОСЯГНЕННЯ.

На основі результатів багаторічного наукового і педагогічного досвіду реалізована концепція автора про статус молодого вченого і наукової школи в цілому.

Представляються наукові праці молодих вчених Природничого факультету МЕНУ, створені у першому семестрі 2010-2011 навчального року на основі базового курсу Фізика з основами геофізики.

Для студентів і аспірантів факультету Кібернетики і Інституту педагогічної освіти МЕНУ, ВНЗ України.



УДК 51-7:519.87

Літнарівич Р.М. Наукова школа МЕНУ. Конструювання і дослідження математичних моделей. Монографії молодих вчених. Книга 25. МЕНУ, Рівне, 2010.-282 с.

Litnarovich R. M. Scientific school IEGU. Constructing and research of mathematical models. Monographs of young scientists. Book 25. IEGU, Rivne, 2010.-282 p.

Рецензенти: В.Г.Бурачек, доктор технічних наук, професор
С.С. Парняков, доктор технічних наук, професор
В.О.Боровий, доктор технічних наук, професор

Відповідальний за випуск: Й.В. Джуль, доктор фізико-математичних наук, професор

Дослідження проведені в рамках роботи наукової школи МЕНУ

На основі методу статистичних випробувань МОНТЕ КАРЛО генеровані псевдовипадкові числа, які нормуються і приводяться до заданої середньої квадратичної похибки, на основі якої конструюються спотворені моделі.

Спотворені моделі зрівноважуються за способом найменших квадратів. Проводиться оцінка точності зрівноважених елементів. Набирається велика статистика і робляться узагальнюючі висновки. Вперше появляється унікальна нагода порівняти істинні і абсолютні похибки математичних моделей.

Хоча загальні теоретичні положення, приведені в кожній монографії уніфіковані і повторюються, однак всі обчислення кожної математичної моделі строго індивідуальні, що і забезпечує авторство молодого вченого за результатами проведених досліджень.

Для студентів, аспірантів і здобувачів вчених степенів Природничого факультету і факультету Кібернетики МЕНУ.

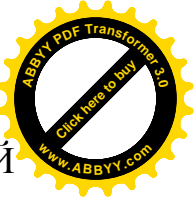
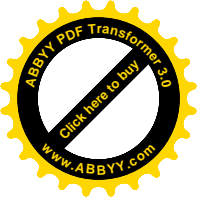
On the basis of method of statistical tests of MONTE KARLO pseudocasual numbers generate, which are rationed and led to the set middle quadratic error which the distorted is constructed on the basis of models.

The distorted models are counterbalanced on the method of leastsquares. The estimation of exactness of the balanced elements is conducted. Large statistics tke and summarizings conclusions are done. Appears first unique case to compare the veritable and absolute errors of mathematical models.

Although theoretical generals, resulted in every monograph compatible and repetitive, however strictly individual all calculations of every mathematical model are, that provides authorship of young scientist as a result of the conducted researches.

For students, graduate students and bread-winners of scientists of degrees of the Natural faculty and to the faculty of Cybernetics IEGU.

© Літнарівич Р.М.,2010



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МІЖНАРОДНИЙ ЕКОНОМІКО-ГУМАНІТАРНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ ім. акад. С. ДЕМ'ЯНЧУКА

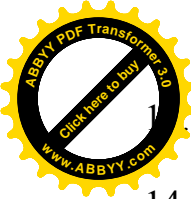
Р. М. Літнарівч

Дослідження точності апроксимації
залежності магнітного моменту
Землі від широти методом
статистичних випробувань
МОНТЕ КАРЛО

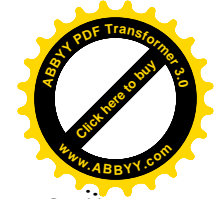
Частина 1



м. Рівне, 2006



- Савельев И.В. Курс физики. Т.2. – М.: наука, 1989, - 464с.
14. Савельев И.В. Курс общей физики. – М.: наука, 1982, - 304с.
15. Ситников О.П. Основы электродинамики. Лабораторный практикум. Чернігів: ЧДІЕіУ, 2003, - 48с.
16. Суботін С.І. Кора і мантія Землі. –К.: Знання, 1966, - 39с.
17. Топографо-геодезические термины: Справочник / Б.С.Кузьмин, Ф.Я. Герасимов, В.М. Молоканов и др.. – М.: Недра, 1989, -261с.
18. Федоров Є.П. Обертання Землі. –К.: Знання, 1966, - 52с.
19. Фізика з використанням обчислювальної техніки. Практичний курс. / В.М.Казанський, В.І. Клапченко, І.Д.Кошелева та інші. – К.: Либідь, 1993, -224с.



УДК 629.123.053.12

Літнарів Р.М. Дослідження точності апроксимації залежності магнітного моменту Землі від широти методом статистичних випробувань МОНТЕ КАРЛО. Частина 1. МEGY, Рівне, 2006, - 44 с.

Рецензенти: В.Г. Бурачек, доктор технічних наук, професор
Є.С. Парняков, доктор технічних наук, професор
В.О. Боровий, доктор технічних наук, професор

Відповідальний за випуск: Й.В. Дунь, доктор фізико-математичних наук, професор

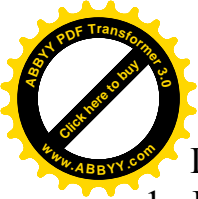
Розроблена методика дослідження точності апроксимації залежності магнітного моменту земної кулі від геомагнітної широти методом статистичних випробувань МОНТЕ КАРЛО.

Дослідження проводяться методом найменших квадратів побудовою поліному третьої степені з встановленням ваг і знаходженням середньої квадратичної похибки виведених коефіцієнтів.

Формулюється ряд теорем, які полегшують проведення досліджень.

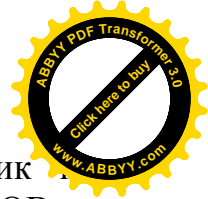
Для студентів і аспірантів педагогічних факультетів.

Р.М.Літнарів



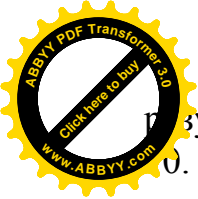
ЗМІСТ

Передмова	3
1. Представлення геомагнітного моменту поля Землі .	4
2. Генерування істинних похибок для дослідження математичної моделі методом статистичних випробувань МОНТЕ КАРЛО	11
3. Побудова спотвореної моделі	13
4. Представлення системи нормальних рівнянь	17
5. Визначення коефіцієнтів нормальних рівнянь	21
6. Рішення нормальних рівнянь	26
7. Встановлення ключа переходу для зрівноважених коефіцієнтів математичної моделі і їх ваг при зменшених значеннях X і Y	31
Постановка проблеми дослідження	31
Формулювання теорем переходу	31
Розрахунок коефіцієнтів нормальних рівнянь .	33
Рішення нормальних рівнянь (перша схема Гаусса)	33
Рішення нормальних рівнянь по другій схемі Гаусса	34
Встановлення ключа переходу. Порівняльний аналіз	36
Оцінка точності результатів	39
Висновки	41
Література	43



Література

1. Кронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗОВ. – М.: Наука, 1980, - 975с.
2. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. – М.: Наука, 1973, 831с.
3. Кошкин Н.И., Ширкевич М.Г. Справочник по элементарной физике. М.: Наука, 1972, -255с.
4. Кучерук І.М., Горбачук І.Т., Луцик П.П. Загальний курс фізики. Т.1. - К.: техніка, 1999, -536с.
5. Кучерук І.М., Горбачук І.Т., Луцик П.П. Загальний курс фізики Т.2. - К.: техніка, 2001, -452с.
6. Кучерук І.М., Горбачук І.Т. Загальний курс фізики Т.3. - К.: техніка, 1999, -520с.
7. Літнарівч Р.М. Основи математики. Дослідження результатів психолого-педагогічного експерименту поліноміальною функцією. Навчальний посібник. Частина 7. МЕНУ, Рівне, 2006, -20с.
8. Мудров В.И., Кушко В.Л. Методы обработки измерений. М.: Сов.радио, 1976, - 192с.
9. Пастушенко С.М. Формули і закони загальної фізики: Навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів. 2е вид.: Діал., 2005, -268с.
10. Рего К.Г. Метрологическая обработка результатов технических измерений. Справочное пособие. –К.: техніка, 1987, -126с.
11. Розв'язування задач з курсу загальної фізики. Практикум/Остроухова, Стрижевський В.Л., Цвілих М.Г. та інші. К.: Радянська школа, 1966, -503с.
12. Савельев И.В. Курс физики. Т.1. – М.: наука, 1989, - 352с.



результати вихідних параметрів x і y .

10. В результаті досліджень встановлено, що при цьому отриманий коефіцієнт a із рішення нормальних рівнянь необхідно зменшити у K^2 разів, коефіцієнт b слід зменшити у K разів, коефіцієнт c і d слід залишити без зміни.

11. Доведено, що при коефіцієнті масштабування вихідних параметрів K вагу коефіцієнта a необхідно збільшити у $(K^2)^3$, а вагу коефіцієнта d слід збільшити у K^2 раз.

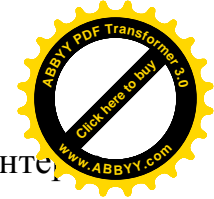
Коефіцієнти $[x \cdot x \cdot 2]$ і $[x^{\circ} x^{\circ} \cdot 2]$ для визначення ваги P_b необхідно збільшити у k^2 раз.

Коефіцієнт $[x^2 x^2 \cdot 2]$ необхідно збільшити у $(k^2)^2$ раз а коефіцієнт $[x^3 x^3 \cdot 2]$ слід збільшити у $(k^2)^3$ раз для визначення ваги P_c коефіцієнта c .

12. Проведені дослідження дають можливість організувати широкомасштабні дослідження точності визначення магнітного моменту Землі методом статистичних випробувань Монте Карло.

13. Розроблені програми для організації обчислень на мікроЕОМ.

14. Розроблені генератори випадкових чисел і побудовані перші спотворені моделі.



Передмова

Безумовний науковий і практичний інтерес представляє дослідження геомагнітного поля Землі.

Вивченню природи геомагнітного поля і в наш час приділяється велика увага. Вчені намагаються отримати відповіді на питання: коли і як зародилось магнітне поле земної кулі? Чому воно існує мільярди років? Як це поле буде змінюватися в майбутньому?

В даній роботі ми зробимо спробу виразити один із основних компонентів геомагнітного поля Землі – **магнітний момент** планети графічно і встановить функціональну залежність магнітного моменту від широти.

Нами підбирається емпірична формула у вигляді поліному третього порядку.

Математична модель будується на основі способу найменших квадратів. Побудована ймовірніша модель приймається за істинну модель, на основі якої проводяться дослідження точності методом статистичних випробувань Монте Карло. Генеруються псевдо випадкові числа, які приймаються як істинні похибки, якими спотворюється істинна модель і будується спотворена модель.

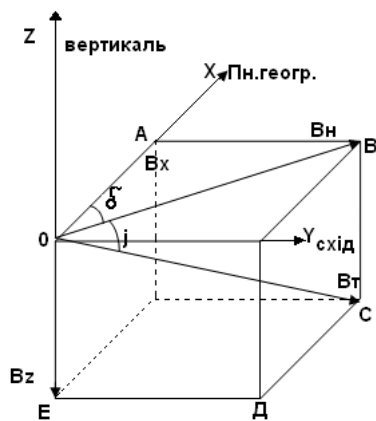
В подальшому методом найменших квадратів зрівноважується спотворена модель і робиться оцінка точності зрівноважених елементів. Знання істинних похибок дає можливість зробити порівняльний аналіз. Набирається велика статистика шляхом побудови і дослідження великої кількості моделей.

Розроблена методика дозволить робити попередній розрахунок точності при проектуванні майбутніх геомагнітних досліджень в будь-якій точці Планети Земля.

Представлення геомагнітного моменту поля Землі

Магнітний момент – це векторна величина, яка характеризує земну кулю як джерело магнітного поля. Макроскопічні магнітні моменти створюють замкнуті електричні струми і впорядковано орієнтовані магнітні моменти атомних частинок.

Розрахуємо магнітний момент M Землі на екваторі при $\varphi_{\text{маг.екв.}} = 0$. При цьому спочатку розглянемо елементи земного магнетизму.



Проекції B_z і B_n індукції дипольного поля, або поля однорідного намагнічування Землі, можна знайти за допомогою формул.

Вертикальна складова геомагнітного поля Землі.

$$B_z = \mu_0 \frac{M}{2\pi R^3} \sin \varphi_M, \quad (1.1)$$

Рис. 1. Елементи земного магнетизму.

Горизонтальна складова

$$B_n = \mu_0 \frac{M}{4\pi R^3} \cos \varphi_M, \quad (1.2)$$

де μ_0 – магнітна стала;

M – магнітний момент земної кулі;

R – радіус Землі;

φ_M – геомагнітна широта, яка відраховується від геомагнітного екватора.

Висновки

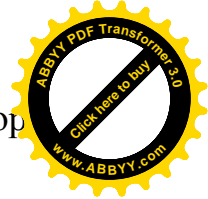
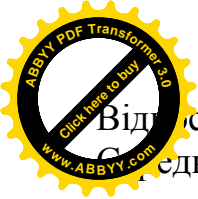
На основі проведених досліджень в даній роботі:

1. Побудована ймовірніша математична модель залежності магнітного моменту Землі від геомагнітної широти:

$$M = 1,2190 \cdot 10^{-5} \varphi_M^3 - 1,4404 \cdot 10^{-3} \varphi_M^2 + 2,8370 \cdot 10^{-2} \varphi_M + 8,8028,$$

де $a = 1,2190 \cdot 10^{-5}$; $b = -1,4404 \cdot 10^{-3}$;
 $c = 2,8370 \cdot 10^{-2}$; $d = 8,8028$.

2. Математична модель апроксимована по способу найменших квадратів кубічним поліномом.
3. Встановлено, що середня квадратична похибка одиниці ваги при розрахунку за виведеною формулою становить 0,11 значень геомагнітного моменту, визначаємого за виведеною формулою, а відносна похибка становить 1,3%
4. Середня квадратична похибка визначення коефіцієнта a $m_a = 2.05 \cdot 10^{-6}$
5. Середня квадратична похибка визначення коефіцієнта b $m_b = 2.81 \cdot 10^{-4}$
6. Середня квадратична похибка визначення коефіцієнта c $m_c = 1.04 \cdot 10^{-2}$
7. Середня квадратична похибка визначення коефіцієнта d $m_d = 0.11$
8. Побудована математична модель приймається за істинну модель, на основі якої генеруються істинні похибки і будуються спотворені моделі для подальших досліджень методом статистичних випробувань Монте Карло.
9. З метою раціоналізації проведення математичної обробки спотворених моделей для дослідження точності визначення геомагнітного моменту Землі проведені дослідження при введенні коефіцієнта K в



Відносна похибка у відсотках $\Delta_{\text{відн.}\%} = \Delta_{\text{відн.}} \cdot 100\% = 1,3\%$.
Середня квадратична похибка визначення коефіцієнта а

$$m_a = \mu \sqrt{\frac{1}{P_a}} = \mu \sqrt{\frac{1}{[x^3 x^3 \cdot 3]}} = 0,11 \sqrt{\frac{1}{2,89 \cdot 10^9}} = 2,05 \cdot 10^{-6}$$

Середня квадратична похибка визначення коефіцієнта d

$$m_d = \mu \sqrt{\frac{1}{P_d}} = \mu \sqrt{\frac{1}{[x^0 x^0 \cdot 3]}} = 0,11 \sqrt{\frac{1}{1,165}} = 0,11$$

Середня квадратична похибка визначення коефіцієнта с

$$\frac{P_c}{[xx \cdot 2]} = \frac{P_d}{[x^0 x^0 \cdot 2]}; \quad P_c = P_d \frac{[xx \cdot 2]}{[x^0 x^0 \cdot 2]}; \quad [x_0 x_0 \cdot 2] = [x^0 x^0] \cdot \frac{[x^3 x^0][x^3 x^0]}{[x^3 x^3]} - \frac{[x^2 x^0 \cdot 1][x^2 x^0 \cdot 1]}{[x^2 x^2 \cdot 1]} = 9 - 3,7578328 -$$

2.6470602 = 2.595107 (див. строчки 12,13,14 П
схеми Гаусса.)

$$m_c = \mu \sqrt{\frac{1}{P_c}} = 0,11 \sqrt{\frac{1}{110,658}} = 1,04 \cdot 10^{-2},$$

де $P_c = \frac{1,164 \cdot 246,56}{2,595} = 110,658$.

Середня квадратична похибка визначення коефіцієнта b

$$[x^3 x^3 \cdot 2] = [x^3 x^3] \cdot \frac{[x^0 x^3][x^0 x^3]}{[x^0 x^0]} - \frac{[x^2 x^3 \cdot 2][x^2 x^3 \cdot 2]}{[x^2 x^2 \cdot 2]} = 9,061 \cdot 10^{11} - 3,783 \cdot 10^{11} - 4,349 \cdot 10^{11} = 9,28 \cdot 10^{10}$$

$$m_b = \mu \sqrt{\frac{1}{P_b}} = 2,81 \cdot 10^{-4},$$

Із приведених формул легко знайти модуль вектор
індукції поля однорідного намагнічування земної кулі

$$B_T = \sqrt{B_Z^2 + B_H^2} \quad (1.3)$$

Підставляючи (1.1), (1.2) в (1.3), будемо мати

$$B_T = \sqrt{\mu_0^2 \frac{M^2}{4\pi^2 R^6} (\sin^2 \varphi_M + \frac{\cos^2 \varphi_M}{4})}, \text{ або}$$

$$B_T = \mu_0 \frac{M}{2\pi R^3} \sqrt{\frac{4 \sin^2 \varphi_M + \cos^2 \varphi_M}{4}}$$

Приймаючи до уваги, що $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$, а $4\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 3\sin^2 \varphi + \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi$, отримаємо

$$B_T = \mu_0 \frac{M}{4\pi R^3} \sqrt{3\sin^2 \varphi_M + 1}, \quad (1.4)$$

Знайдемо магнітний момент М із формули (1.4)

$$M = \mu_0 \sqrt{\frac{B_T^4 \pi^4 R^6}{3\sin^2 \varphi_M + 1}} \quad (1.5)$$

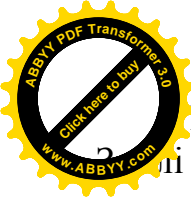
Напруженість магнітного поля на магнітному екваторі
Некв. = 0,34 ерстеда [3, -с.163].

Для переходу із системи СГСМ у систему СІ складемо
слідуючу пропорцію

$$\frac{1}{M} \frac{a}{M} \text{ — } 4\pi 10^{-3} e, \\ H_{\text{екв.}} \text{ — } 0,34 e,$$

Звідки

$$H_{\text{екв.}} = \frac{1 a / M \cdot 0,34 e}{4\pi 10^{-3} e} = 27,05634033 \frac{a}{M}$$



В загальному випадку напруженість магнітного поля її можна розрахувати за формулою

$$H = \frac{B_T}{\mu_0} = \frac{M}{4\pi R^3} \sqrt{3\sin^2\varphi_M + 1} \quad (1.6)$$

Тоді загальна формула розрахунку магнітного моменту Землі буде

$$M = \frac{4\pi R^3 H}{\sqrt{1+3\sin^2\varphi_M}} \quad (1.7)$$

Для полюса $H_{\text{пол.}} = 0,66$ ерстед. Тоді, при переході до системи СІ

$$\frac{1 \text{ м}}{H_{\text{пол.}}} = \frac{4\pi 10^{-3} \text{ е}}{0,66 \text{ е}}$$

звідки

$$H_{\text{пол.}} = \frac{1 \text{ м}}{4\pi 10^{-3} \text{ е}} \cdot 0,66 \text{ е} = 52,52113122 \text{ а/м.}$$

Магнітний момент Землі біля полюсів

$$M_{\text{пол.}} = \frac{H_{\text{пол.}} \cdot 4\pi R^3}{\sqrt{1+3\sin^2 90^\circ}}$$

Взявши радіус земної кулі $R = 6371000 \text{ м}$, а $4\pi R^3 = 3,249620751 \cdot 10^{21} [\text{м}]^3$, магнітний момент земної кулі на екваторі буде

$$M_{\text{екв.}} = \frac{3,249620751 \cdot 10^{21} [\text{м}]^3 \cdot 27,05634033 [\text{а/м}]}{1}$$

де x – геомагнітна широта пункту спостереження, виражена в градусах.

7.7. Оцінка точності результатів

Вичислимо за формулою (7.11) значення M' і розрахуємо поправки

$$V_i = M_i - M'_i \quad (7.12)$$

Для розрахунку M'_i скористаємося програмою заключного контролю 5.

Таблиця 20. Порівняльний аналіз результатів строгого зрівноваження

№п/п	X(град)	$y = \mu \cdot 10^{22}$	$y' = M' \cdot 10^{22}$	$v = M - M'$	v^2
1	0,00	8,79	8,803	-0,013	0,000169
2	11,25	8,90	8,957	-0,057	0,003249
3	22,50	9,05	8,851	+0,199	0,039601
4	33,75	8,50	8,598	-0,088	0,007744
5	45,00	8,18	8,274	-0,094	0,008836
6	56,25	8,00	8,011	-0,011	0,000121
7	67,50	7,95	7,904	+0,046	0,002116
8	78,75	8,12	8,057	+0,063	0,003969
9	90,00	8,53	8,575	-0,045	0,002025
n=9		Σ	$76,02 \cdot 10^2$	$\Sigma 0$	0,06783

Середню квадратичну похибку одиниці ваги розрахуємо за формулою

$$\mu = \frac{\sqrt{\Sigma v^2}}{n-k} \quad (7.13)$$

де n – число вихідних параметрів x і y , k – степінь поліному. В нашому випадку

$$\mu = \sqrt{\frac{0,06783}{9-3}} \cdot 10^{22} = 0,11 \cdot 10^{22} \text{ ам}$$

Гранична похибка

$$\Delta_{\text{гр.}} = 2,5\mu = 0,26 \cdot 10^{22} \text{ ам}$$

Відносна похибка

$$\frac{\mu}{M_{\text{середн.}}} = \frac{0,11 \cdot 10^{22}}{76,02 \cdot 10^{22}} = 0,013$$



При даних умовах коефіцієнт $[x^0x^0 \cdot 2]$ для визначення ваги Pb необхідно збільшити у k^2 разів.

$$[x^0x^0 \cdot 2]_1 = [x^0x^0 \cdot 2]_k \cdot k^2 = 2,595 \cdot 10^{-4} \cdot (100)^2 = 2,595$$

Теорема доказана

16. При даних умовах коефіцієнт $[x^2x^2 \cdot 2]$ для визначення ваги Pc необхідно збільшити у $(k^2)^2$ раз.

$$[x^2x^2 \cdot 2]_1 = [x^2x^2 \cdot 2]_k \cdot (k^2)^2 = 4,933 \cdot 10^{-2} \cdot (100)^2 = 4,933 \cdot 10^{-2} \cdot 10^8 = 4,933 \cdot 10^6$$

Теорема доказана

17. При даних умовах коефіцієнт $[x^3x^3 \cdot 2]$ для визначення ваги Pc необхідно збільшити у $(k^2)^3$ раз

$$[x^3x^3 \cdot 2]_1 = [x^3x^3 \cdot 2]_k \cdot (k^2)^3 = 9,2804 \cdot 10^{-2} \cdot (100)^3 = 9,280 \cdot 10^{10}$$

Теорема доказана

В заключення відмітимо, що аналогічні дослідження були проведені при коефіцієнті масштабування, рівному 10, що абсолютно підтвердило дані твердження.

Крім рішення нормальних рівнянь по схемі Гаусса проводилось рішення на мікроЕОМ по розробленій автором програмі. Зведемо всі результати в таблицю 19.

Таблиця 19. Зведена таблиця результатів побудови математичної моделі.

№п/п	a·10 ⁻⁵	b·10 ⁻³	c·10 ⁻²	d	Hк
1	1,2189811	-1,4403967	2,8370474	8,8028413	1:1
2	1,2190193	-1,4404495	2,8372336	8,8028306	1:1
3	1,2190462	-1,4404918	2,837416	8,8028145	1:1
4	1,2187907	-1,440119	2,83589	8,802912	1:1
5	1,2189736	-1,4403861	2,8370087	8,802838	1:100
6	1,2185367	-1,4397769	2,834832	8,802971	1:100
7	1,2190277	-1,4404609	2,8372721	8,8028286	1:100
8	1,2190915	-1,440566	2,837784	8,802769	1:100
модель	1,2190·10 ⁻⁵	-1,4404·10 ⁻³	2,8370·10 ⁻²	8,8028	

На основі проведених досліджень отримана формула залежності магнітного моменту Землі від широти

$$Y=M=1,2190 \cdot 10^{-5} x^3 - 1,4404 \cdot 10^{-3} x^2 + 2,8370 \cdot 10^{-2} x + 8,8028. \quad (7.11)$$



$$= 8,792284498 \cdot 10^{22} a \cdot M^2.$$

Розрахуємо магнітний момент земної кулі на полюсі

$$\frac{3,249620751 \cdot 10^{21} \cdot 52,52113122}{2}$$

$$M_{\text{пол.}} =$$

$$= 8,533687894 \cdot 10^{22} a \cdot M^2$$

Розрахуємо магнітний момент Землі на широті 45°, прийнявши середнє значення напруженості

$$\frac{H_{0^\circ} + H_{90^\circ}}{2} = \frac{0,34e + 0,66e}{2}$$

$$H_{45^\circ} = \frac{0,34e + 0,66e}{2} = 0,50e.$$

Тоді

$$\frac{a}{1 \text{ м}} \text{ ----- } 4\pi 10^{-3} e,$$

$$H_{45^\circ} \text{ ----- } 0,5e,$$

Звідки

$$\frac{a}{1 \text{ м}} \cdot 0,5e \text{ ----- } a$$

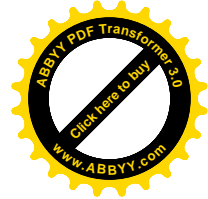
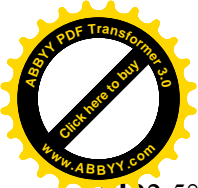
$$H_{45^\circ} = \frac{3,249620751 \cdot 10^{21} [M]^3 \cdot 39,78873577}{4\pi 10^{-3} e} = 39,78873577 \frac{a}{\text{м}}.$$

Таким чином, магнітний момент H_{45° буде

$$H_{45^\circ} = \frac{3,249620751 \cdot 10^{21} [M]^3 \cdot 39,78873577}{\sqrt{1+3\sin^2 45^\circ}} \frac{a}{\text{м}}$$

$$= 8,177542602 \cdot 10^{22} a \cdot M^2$$

Знайдемо середню напруженість магнітного поля Землі для широти 22,5°



$$H_{22,5^\circ} = \frac{0,34e+0,50e}{2} = 0,42e,$$

для $\varphi_{\text{маг.}} = 67,5^\circ$

$$H_{67,5^\circ} = \frac{0,50e+0,60e}{2} = 0,58e.$$

І для $\varphi_{\text{маг.}} = 22,5^\circ$

$$\frac{1}{m} \cdot \dots \cdot 4\pi 10^{-3}e,$$

$$H_{22,5^\circ} \dots 0,42e.$$

Звідки

$$H_{22,5^\circ} = \frac{\frac{1}{m} \cdot 0,42e}{4\pi 10^{-3}e} = 33,422538 \frac{a}{m},$$

і по аналогії

$$H_{67,5^\circ} = \frac{\frac{1}{m} \cdot 0,58e}{4\pi 10^{-3}e} = 46,1549335 \frac{a}{m}.$$

Магнітні моменти будуть відповідно

$$M_{22,5^\circ} = \frac{3,249620751 \cdot 10^{21} \text{ м}^3 \cdot 33,422538 \frac{a}{m}}{\sqrt{1+3\sin^2 22,5^\circ}} = 9,052956514 \cdot 10^{22} a/m$$

$$M_{67,5^\circ} = \frac{3,249620751 \cdot 10^{21} \text{ м}^3 \cdot 46,1549335 \frac{a}{m}}{\sqrt{1+3\sin^2 67,5^\circ}}$$

тому що

$$b_1 = \frac{-1,4404 \cdot 10^{-1}}{100} = -1,4404 \cdot 10^{-3}$$

Теорема 2 доказана.

3. При даних умовах отриманий коефіцієнт с при х залишається без змін

$$c_1 = c_{100} = 2,840 \cdot 10^{-3}$$

Теорема 3 доказана.

4. При даних умовах коефіцієнт d залишається без змін

$$d_1 = d_{100} = +8,80284$$

Теорема 4 доказана

5. При даних умовах вагу останнього невідомого Pa необхідно збільшити у $(k^2)^3$ разів.

Дійсно

$$Pa_1 = Pa_k \cdot (k^2)^3 = Pa_{100} \cdot (100^2)^3 = 2,890 \cdot 10^{-3} \cdot (100^2)^3 = 2,890 \cdot 10^9$$

Теорема 5 доказана.

6. При даних умовах вагу Pd коефіцієнта d необхідно збільшити у k^2 разів

$$Pd_1 = Pd_k \cdot k^2 = Pd_{100} \cdot 100^2 = 1,164 \cdot 10^{-4} \cdot 100^2 = 1,164$$

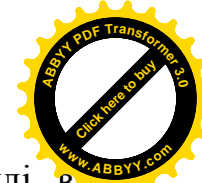
Теорема 6 доказана

7. При даних умовах коефіцієнт [xx·2] для визначення ваги Pb необхідно збільшити у (k^2) разів.

Дійсно

$$[xx \cdot 2]_1 = [xx \cdot 2]_k \cdot (k^2) = 2,465 \cdot 10^{-2} \cdot (100^2) = 2,465 \cdot 10^{-2} \cdot 10^4 = 2,465 \cdot 10^2 = 246,5$$

Теорема доказана



Таким чином із вищесказаного видно, що коефіцієнти необхідно зменшувати в К раз. Тоді будуть виконуватися і проміжні контролю і зручно оперувати з такими числами.

Але при цьому необхідно знати лише ключ переходу від зрівноважених параметрів з коефіцієнтом К.

7.6. Встановлення ключа переходу. Порівняльний аналіз.

Таблиця 18. Зведена таблиця результатів зрівноваження при К=1 і К=100

№п/п	1: к	a	B	c	d	Pa	Pd
1	2	3	4	5	6	7	8
1	1:1	1,2190·10 ⁻⁵	-1,4404·10 ⁻³	2,8370·10 ⁻³	+8,80284	2,890·10 ⁹	1,164
2	1:100	1,2190·10 ⁻¹	-14404·10 ⁻¹	2,840·10 ⁻³	+8,80284	2,890·10 ⁻³	1,164·10 ⁻¹
3	1:1	a ₁₀₀ /к ²	b ₁₀₀ /к ²	b ₁ =b ₁₀₀	d ₁ =d ₁₀₀	Pa ₁ =Pa ₁₀₀ ·(к ²) ³	Pd ₁ =Pd ₁₀₀ ·к ²

Продовження таблиці 18

№п/п	1: к	[xx·2]	[x°x°·2]	[x ² x ² ·2]	[x ³ x ³ ·2]
1	2	9	10	11	12
1	1:1	246,5651	2,59511	4933573	9,28044·10 ⁰
2	1:100	2,465·10 ⁻²	2,59511·10 ⁻¹	4,933·10 ⁻²	9,28043·10 ⁻²
3	1:1	[xx·2] ₁₀₀ ·к ²	[x°x°·2] ₁₀₀ ·к ²	[x ² x ² ·2] ₁₀₀ ·(к ²) ²	[x ³ x ³ ·2] ₁₀₀ ·(к ²) ³

Із результатів зрівноваження, проведених в табл.18 випливає

1. Якщо в початкових умовах рівняннях зменшити значення вихідних параметрів х і у в к разів, то отриманий коефіцієнт а при х³ із рішення нормальних рівнянь необхідно зменшити у к² разів, тобто

$$a_1 = \frac{a_k}{k^2}$$

Дійсно, в нашому випадку

$$a_1 = \frac{a_{100}}{100^2} = \frac{1,2190 \cdot 10^{-1}}{100^2} = 1,2190 \cdot 10^{-5}$$

Теорема 1 доведена.

2. При даних умовах отриманий коефіцієнт b при х² необхідно зменшити в к разів

$$b_1 = \frac{b_k}{k}$$

$$= 7,948506716 \cdot 10^{22} \text{ а} \cdot \text{м}^2$$

Результати залежності геомагнітного моменту Землі від широти точки спостереження зведемо в табл. 1.

Таблиця 1. залежність геомагнітного моменту Землі від широти точки спостереження

№ п/п	φ _{маг.} = x (градуси)	Y=M = f(x) (а/м)	Δ
1	0,00	8,79·10 ²²	+0,11
2	11,25	8,90·10 ²²	+0,15
3	22,50	9,05·10 ²²	-0,45
4	33,75	8,50·10 ²²	-0,32
5	45,00	8,18·10 ²²	-0,18
6	56,25	8,00·10 ²²	-0,05
7	67,50	7,59·10 ²²	+0,17
8	78,75	8,12·10 ²²	+0,41
9	90,00	8,53·10 ²²	
n=9		∑ 76,02·10 ²²	

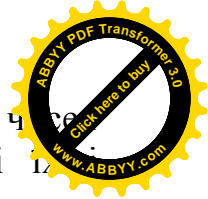
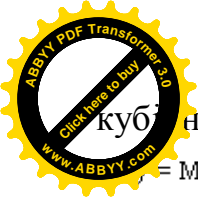
Згідно формули (1.7) магнітний момент залежить від напруженості магнітного поля і широти

точки спостереження, тобто є функцією двох незалежних змінних, хоча в свою чергу напруженість геомагнітного поля, також залежить від широти.

На жаль, у нас немає формули залежності напруженості магнітного поля від широти, що не потребувало б знання магнітного моменту і навпаки.

Тому, безперечний інтерес представляє встановлення функціональної залежності магнітного моменту як головного компонента для визначення складових геомагнітного поля Землі від геомагнітної широти.

Маючи вузлові точки значень геомагнітного моменту Землі в магнітних широтах 0°, 22,5°, 45°, 67,5° і 90°, побудуємо точкову діаграму і графік, представлений на рис. 1. Як видно із графіка, кращою функцією для апроксимації буде



кубичний поліном, тобто

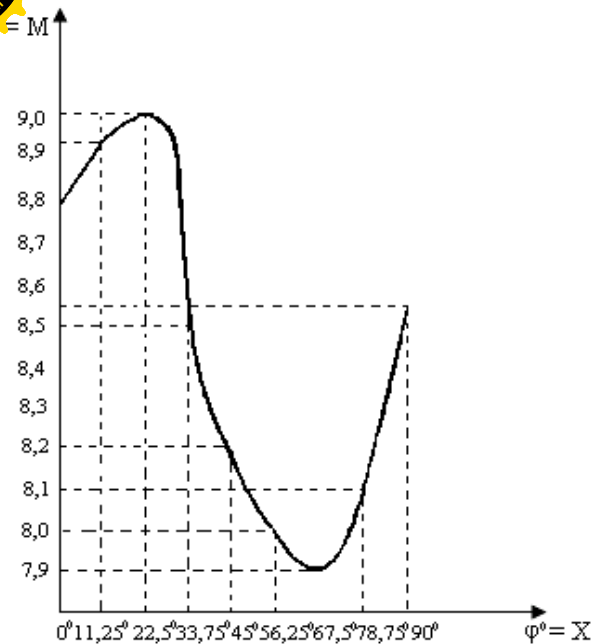


Рис.1 Графік залежності магнітного моменту земної кулі від геомагнітної широти

будемо шукати функціональну залежність у вигляді функції вид у

$$y = ax^3 + vx^2 + cx + d. (1.8)$$

Невідомі коефіцієнти а, в, с, d визначимо по способу найменших квадратів.

Проміжні точки в 11,5°; 33,75°; 56,25° і 78,75° визначимо безпосередньо із графіка. Цього нам буде цілком достатньо для побудови ймовірнішої моделі. побудовану таким чином ймовірнішу модель залежності кулі від широти в подальшому приймемо за істинну модель, і генеруючи істинні похибки будемо створювати спотворені моделі, на яких можна дослідити точність

визначення магнітного моменту в залежності від похибки визначення широти.

У зв'язку з переходом від дванадцятизначних цілих до дробових помітна втрата точності при діленні і в подальшому оперуванні з дробовими числами. Тому для виконання контролю в 5 стрічці необхідно число 119032,5 помножити не на фактичне число -1,0123344 із шостої стрічки стовпчика сум, яке втратило точність, а на контрольну суму -1,0257643.

Тоді, $119032,5 \cdot (-1,0257643) = -122099,28$ і його записуємо у дев'яту стрічку стовпчика сум. Якщо цього (втрати точності) не враховувати, то замість правильного числа 122099,28 отримаємо неправильне число 120500,69, різниця яких буде 1598,59 і про подальші контролю, які базуються на попередніх вже не може бути і мови.

Але навіть і в цьому випадку контрольне число десятої стрічки стовпчика сум +110,72 не дорівнює контрольному 93,03154. Знайдемо яке ж має бути число замість взятого нами контрольного -1,0257643,

Тоді,

$$((110,72 - 93,03154) + 122099,28) / 22116,97 = 1,0259128.$$

Тобто, замість числа 1,0257643 необхідно взяти число 1,0259128. Різниця ж цих чисел 0,0001485 лежить за межами точності даного конкретного випадку.

Фактично можемо вважати, що розрахунки за схемою Гаусса в нашому конкретному випадку забезпечують точність до чотирьох значущих цифр після коми.

Але контролі нам потрібні не для виконання процедури контролів, а для контролю рішення системи нормальних рівнянь. Заключний же контроль вирішує проблему всіх проміжних контролів в цілому. А заклучні контролі і по першій і по другій схемах Гаусса виконуються добре.



Таблиця 15. Рішення нормальних рівнянь (друга схема Гаусса)

№m/n	x ⁰ d	x c	x ⁰ b	x ⁰ a	y	s	контроль
1	9	405	25818,751	1845281,3	-76,02	1871437,6	
2	-1	-45	-2868,7501	-205031,25	+8,4466666	-207937,51	-207937,55
3	[x	25818,751	1845281,3	1,4051048·10 ⁸	-3352,5	1,4237862·10 ⁸	
4		-18225	-1161843,8	-83037656	+3420,9	-84214691	
5		+7593,751	+683437,5	+57472820	+68,4	+58163930	+58163920
6		-1	-89,999988	-7568,4362	-9,0074062·10 ⁻⁹	-7659,4465	-7659,4452
7	[x ²	1,4051048·10 ⁸	1,1132236·10 ¹⁰	-212938,88	1,1274353·10 ¹⁰		
8		-74067544	-5,2936507·10 ⁹	+218082,38	-5,3686867·10 ⁹		
9		-61509367	-5,1925531·10 ⁹	-6155,9992	-5,234753·10 ⁹		
10		[x ² x ² =	+4933573	+6,660319·10 ⁸	-1012,5	+6,70913·10 ⁸	6,7096·10 ⁸
11		-1	-134,9999	+2,0522651	-135,98927	135,999	
12	[x ²		9,0612411·10 ¹¹	-15240713	9,1737977·10 ¹¹		
13			[x ² x ² =	-3,7834033·10 ¹¹	+15586476	-3,8370319·10 ¹¹	
14			-4,3497937·10 ¹¹	-517681,04	-4,4020999·10 ¹¹		
15		[x ² x ² =	-8,9914239·10 ¹⁰	+136687,4	-9,0573191·10 ¹⁰		
16		Pa=	[x ² x ² =	+2,890171·10 ⁹	-35230,64	+2,8934·10 ⁹	+2,890·10 ⁹
17			-1	+1,2189811·10 ⁻⁵	-1,0011172	0,9999878	
18	+8,446666	-9,0074062·10 ⁻⁹	+2,0522651·10 ⁻⁴	+1,2189811·10 ⁻⁵			
19	-205031,250	-7568,4362 a	-134,9999a	a			
20	-2868,7501 b	-89,999988 b	-1,4403667·10 ⁻³				
21	-45c	+2,8370474·10 ⁻⁷	b				
22	+8,8028413	c					
23	d						

7.5. Рішення нормальних рівнянь по другій системі Гаусса

Як і раніше, з метою визначення ваг коефіцієнтів d і c переставимо строчки системи нормальних рівнянь і члени в строчках так, щоб коефіцієнт d був на останньому місці, а коефіцієнт c в передостанньому стовпчику перед стовпчиком вільних членів.

Таблиця 16. Коефіцієнти нормальних рівнянь для другої схеми Гаусса

	x ²	x ²	x	x ⁰	y	s	контроль
[x ²	9,0612411·10 ¹¹	1,1132236·10 ¹⁰	1,4051048·10 ⁸	1845281,3	-15240713	9,1738346·10 ¹¹	
[x ²		1,4051048·10 ⁸	1845281,3	25818,751	-212938,88	1,1274353·10 ¹⁰	
[x			25818,751	405	-3352,5	1,4237864·10 ⁸	
[x ⁰				9	-76,02	1871437,6	

Таблиця 17. Рішення нормальних рівнянь (друга система Гаусса)

№m/n	x ⁰ a	x ⁰ b	x c	x ⁰ d	y	s	контроль
1	[x ²	9,0612411·10 ¹¹	1,1132236·10 ¹⁰	1,4051048·10 ⁸	1,845281,3	-15240713	9,1738346·10 ¹¹
2		-1	-1,2285553·10 ⁹	-1,5506758·10 ⁻⁴	-2,0364553·10 ⁻⁹	+1,6819674·10 ⁻⁵	-1,0124558
3	[x ²	1,4051048·10 ⁸	1845281,3	25818,751	-212938,88	1,1274353·10 ¹⁰	
4		-1,3676567·10 ⁸	-1726248,8	-22670,301	+187240,58	-1,1270562·10 ⁹	
5	Σ	[x ² x ²]=	3744810	119032,5	+3148,45	-25698,3	3791000
6		-1	-3,1785991·10 ⁻²	-8,4075026·10 ⁻¹	+6,8623776·10 ⁻³	-1,0123344	-1,0257643
7	[x	25818,751	1845281,3	405	-3352,5	1,4237864·10 ⁸	
8			-2,1788,62	-286,14331	+2363,3404	-1,4225643·10 ⁸	
9			-3783,56598	-100,07661	+816,84596	-1,22099,28	
10	Σ	[xx2]=	+246,5651	+18,78008	-172,31364	+110,72	93,03154
11			-1	-7,6166821·10 ⁻²	+6,9885656·10 ⁻¹		-0,3775102
12	[x ⁰			9	-76,02	1871437,6	
13			[x ⁰ x ² =	-3,7578328	+31,037029	-1,868210,3	
14			-2,6470602	+21,605853	-3,230,0351		
15		[x ⁰ x ² =	-1,4304186	+13,124582	-7,0859157		
16	Σ	Pd=[x ⁰ x ² =	+1,1646884	+10,252536	-9,8210157		-9,087848
17			-1	-1	+8,8028145	+8,4323	+7,8028145
18		+1,6819674·10 ⁻⁵	+6,8623776·10 ⁻³	+6,9885656·10 ⁻¹	+8,8028145		
19		-2,0364553·10 ⁻⁹ d	-8,4075026·10 ⁻¹ d	-7,6166821·10 ⁻² d	d		
20		-1,5506758·10 ⁻⁴ c	-3,1785991·10 ⁻² c	+2,837416·10 ⁻³			
21		-1,2285553·10 ⁻⁹ b	-1,4404918·10 ⁻³	c			
22		+1,2190462·10 ⁻⁵	B				
23		a					

2. Генерування істинних похибок для дослідження математичної моделі методом статистичних випробувань МОНТЕ КАРЛО

Приведемо програму генерування випадкових чисел на мові BASIC

Програма №1. Генерування випадкових чисел на BASIC

```

10 PRINT «Генератор випадкових чисел в діапазоні від -M
до +M»
20 INPUT «Введіть середню квадратичну похибку вимірів і
їх число», M; N
30 DIM Z(N)
40 X = -M; Y = +M; PRINT "M ="; M : PRINT "N ="; N
50 FOR I = 1 TO N
60 Z(I) = ((Y-X)*RND(I) + X)
70 PRINT USING "Z" (##.) = ##.#.#.; I; Z(I)
80 NEXT I
90 END
    
```

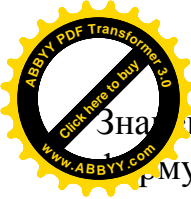
Таблиця 2. Істинні похибки при M=1

	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
00	+0,43	+0,37	-0,04	+1,00	+0,29	-0,74	-0,26	+0,17	-0,73	+0,87
10	-0,56	-0,38	-0,53	+0,79	+0,17	-0,08	-0,99	+0,65	-0,95	-0,25
20	+0,01	+0,10	+0,77	-0,28	+0,64	+0,75	-0,17	+0,42	-1,00	+0,20
30	-0,04	+0,53	-0,81	+0,09	+0,76	+0,65	-0,64	+0,06	-0,65	-0,60

Для знаходження середніх квадратичних похибок з точністю 0,1 необхідно дані табл..2 помножити на 0,1, тобто перенести кому на один знак вліво. При генеруванні похибок з точністю 0,05 необхідно дані табл..1 помножити на 0,05.

Заслуговує уваги генерування псевдо випадкових чисел, роз приділених за нормальним законом

$$P(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (2.1)$$



Значення Δ_{2i-1} , Δ_{2i} генеруються із ζ_i ($i=1,2,3\dots$) за формулами

$$\Delta_{2i-1} = (-2 \ln \zeta_i)^{1/2} \cos(e^9 \zeta_i), \quad (2.2)$$

$$\Delta_{2i} = (-2 \ln \zeta_i)^{1/2} \sin(e^9 \zeta_i). \quad (2.3)$$

Значення ζ_i виробляються за допомогою лінійного методу $\zeta_{i+1} = F(11 \zeta_i + \pi)$, (2.4)

де $F(z)$ дробна частина від z .

Проведемо програму генерування псевдо випадкових чисел по даній методиці на програмованому мікрокалькуляторі «Електроніка МК61».

Програма №2. генератор випадкових чисел.

Фпрг	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
00	кпх4	Fπ	пхd	пх4	:	+	к{x}	хpd	9	Fe°
10	х	хпс	Fcos	пхd	Fx²	FlnX	/-/	F√	хpb	х
20	с/п	пхс	Fsin	пхв	х	с/п	БП	оо	F	АВТ

В регістрах 4 і d зберігаються проміжні результати слідуєчих значень Δ_i , тому ці регістри не можна використовувати для других цілей. Перемикач Р/Г встановлюється в положення Р. Розрахунки проводяться в слідуєчому порядку:

$$0,011 \text{ хп4 } 0,3 \text{ хpd } \text{В/О } \text{с/п} - 0,5816 \text{с/п } 1.1933\dots$$

Таблиця №3. Псевдо випадкові числа для дослідження спотвореної моделі

	01	02	03	04	05	06	07	08	09
00	-0,58	+1,19	-0,16	+0,23	+0,20	+1,19	+0,89	+0,64	-0,75
10	-1,09	-1,59	+0,11	+0,09	-0,91	-1,61	-1,67	+0,30	-0,69
20	+0,35	+0,30	-1,53	+0,93	-0,23	+0,19	-0,12	-0,54	-0,19

Дані значення пропорційно зменшуються або збільшуються в залежності від точності, яку ми беремо за основу при побудові даної конкретної математичної моделі, попередньо визначивши середню квадратичну похибку для

$$[X^3 X^3 \cdot 2]_{1:1} = [X^3 X^3 \cdot 2]_{1:k} \cdot (K^2)^3 \quad (7.10)$$

7.3. Розрахунок коефіцієнтів нормальних рівнянь

Для доказу сформульованих теорем знайдемо коефіцієнти нормальних рівнянь при $k=1$, тобто значення параметрів x : y не масштабували.

Таблиця 13. Знаходження коефіцієнтів нормальних рівнянь.

№п/п	X=φ°	Y=M·10 ²²	x°	x²	x³	s	x³x³	x³x²	x³x
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,00	8,79	1	0	0	-7,79	0	0	0
2	11,25	8,90	1	126,5625	1423,8281	1553,7406	2027286,4	180203,24	16018,066
3	22,50	9,05	1	506,25	11390,625	11910,875	1,2974633·10 ⁸	5766503,9	256289,06
4	33,75	8,50	1	1139,0625	38443,359	39608,672	1,4778919·10 ⁹	43789388	1297463,3
5	45,00	8,18	1	2025,00	91125	93187,82	8,3037656·10 ⁹	1,8452813·10 ⁸	4100625
6	56,25	8,00	1	3164,0625	177978,52	181191,83	3,1676353·10 ¹⁰	5,6313516·10 ⁸	10011292
7	67,50	7,95	1	4556,25	307546,88	312163,68	9,4585083·10 ¹⁰	1,4012605·10 ⁹	20759414
8	78,75	8,12	1	6201,5625	488373,05	496646,24	2,3850824·10 ¹¹	3,028676·10 ⁹	38459377
9	90,00	8,53	1	8100	729000	737182,47	5,31441·10 ¹¹	5,9049·10 ⁹	65610000
n=9	405	76,02	9	25818,751	1845281,3	1871437,6	9,0612411·10 ¹¹	1,1132236·10 ¹⁰	1,4051048·10 ⁸

Продовження таблиці 13

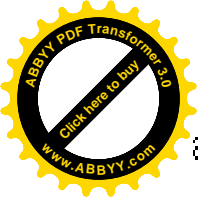
№п/п	X=φ°	Y=M·10 ²²	x²y	x³s	x²y	x³s	xy	xs
1	2	3	11	12	13	14	15	16
1	0,00	8,79	0	0	0	0	0	0
2	11,25	8,90	12672,07	2212259,5	1126,4063	196392,16	100,125	17479,581
3	22,50	9,05	103085,16	1,3567231·10 ⁸	4581,5625	6029095,7	203,625	267994,68
4	33,75	8,50	326768,55	1,5226904·10 ⁹	9682,0312	45114474,8	286,875	1336792,7
5	45,00	8,18	745402,5	8,4917401·10 ⁹	16564,5	1,8870129·10 ⁸	368,1	4193451,9
6	56,25	8,00	1423828,2	3,22478253·10 ¹⁰	25312,5	5,7329594·10 ⁸	450	10192040
7	67,50	7,95	2444997,7	9,6004965·10 ¹⁰	36222,188	1,4222867·10 ⁹	536,625	21071048
8	78,75	8,12	3965589,2	2,4157189·10 ¹¹	50356,688	3,0675672·10 ⁹	639,45	38953391
9	90,00	8,53	6218370	5,3740602·10 ¹¹	69093	5,9711618·10 ⁹	767,7	66346422
n=9	405	76,02	15240713	9,1738344·10 ¹¹	212938,88	1,1274353·10 ¹⁰	3352,5	1,4237862·10 ⁸

7.4. Рішення нормальних рівнянь (перша схема Гаусса)

Зведемо обчислені в табл.13 коефіцієнти у трикутну матрицю для рішення нормальних рівнянь

Таблиця 14. Коефіцієнти нормальних рівнянь для першої схеми Гаусса

	x°	x	x²	x³	y	s	контроль
[x°	9	405	25818,751	1845281,3	-76,02	1871437,6	1871438,1
[x		25818,751	1845281,3	1,4051048·10 ⁸	-3352,5	1,4237862·10 ⁸	1,4237864·10 ⁸
[x²			1,4051048·10 ⁸	1,1132236·10 ¹⁰	-212938,88	1,1274353·10 ¹⁰	1,1274405·10 ¹⁰
[x³				9,0612411·10 ¹¹	-15240713	9,1737977·10 ¹¹	9,1738346·10 ¹¹



$$a_{1:1} = a_{1:k} \cdot k^2 = \frac{a_{1:k}}{k^2}, \quad (7.1)$$

Теорема 2. При даних умовах отриманий коефіцієнт b при x^2 необхідно зменшити в K разів (у нашому випадку в 100 разів)

$$b_{1:1} = \frac{b_{1:k}}{k} \quad (7.2)$$

Теорема 3. При даних умовах, отриманий коефіцієнт c при x залишається без змін, тобто

$$c_{1:1} = c_{1:k} \quad (7.3)$$

Теорема 4. При даних умовах, отриманий коефіцієнт d залишається без змін, тобто

$$d_{1:1} = d_{1:k} \quad (7.4)$$

Теорема 5. При даних умовах вагу P_a необхідно збільшити у $(k^2)^3$ разів, тобто

$$P_{a_{1:1}} = P_{a_{1:k}} (k^2)^3 \quad (7.5)$$

Теорема 6. При даних умовах вагу P_d коефіцієнта d необхідно збільшити у k^2 разів, тобто

$$P_{d_{1:1}} = P_{d_{1:k}} \cdot k^2 \quad (7.6)$$

Теорема 7. При даних умовах коефіцієнт $[xx \cdot 2]$ для визначення ваги P_b необхідно збільшити у (k^2) разів, тобто

$$[xx \cdot 2]_{1:1} = [xx \cdot 2]_{1:k} (k^2) \quad (7.7)$$

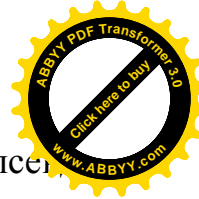
Теорема 8. При даних умовах коефіцієнт $[x^\circ x^\circ \cdot 2]$ для визначення ваги P_b слід збільшити у k^2 разів, тобто

$$[x^\circ x^\circ \cdot 2]_{1:1} = [x^\circ x^\circ \cdot 2]_{1:k} \cdot k^2 \quad (7.8)$$

Теорема 9. При даних умовах коефіцієнт $[x^2 x^2 \cdot 2]$ для визначення ваги P_c необхідно збільшити у $(k^2)^2$ раз, тобто

$$[x^2 x^2 \cdot 2]_{1:1} = [x^2 x^2 \cdot 2]_{1:k} \cdot (k^2)^2 \quad (7.9)$$

Теорема 10. При даних умовах коефіцієнт $[x^3 x^3 \cdot 2]$ для визначення ваги P_c необхідно збільшити у $(k^2)^3$ разів, тобто



даного конкретного числа похибок.

Методика пропорційного розрахунку псевдо випадкових чисел буде приведена нижче.

3. Побудова створеної моделі

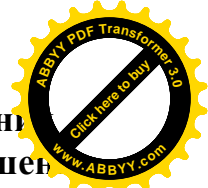
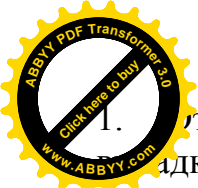
Будувавши ймовірнішу модель по способу найменших квадратів, приймаємо її за істинну модель, адже у неї задовольняються всі умовні рівняння з одного боку, і встановлений функціональний зв'язок між параметрами X і Y – з другого.

В залежності від мети досліджень, задаємося нормативним значенням середньої квадратичної похибки визначення геомагнітної широти $X = \varphi$, генеруємо випадкові числа, які б в цілому відповідали нормативній точності, і спотворюємо істинну модель цими похибками.

Зрівноваживши спотворену модель, отримуємо математичну модель, робимо оцінку точності елементів зрівноваженої моделі і встановлюємо відповідність похибок визначення магнітного моменту земної кулі.

Непарні моделі будуть генерувати істинну похибку $0,05^\circ$, а парні $0,1^\circ$.

Сучасні калькулятори мають «вшиті» генератори для генерування випадкових чисел від 0 до 1. але вони генерують числа тільки зі знаком «плюс». Приведемо методику розрахунку випадкових чисел, які приймемо в подальшому як істинні похибки для побудови спотвореної моделі.



1. Отримавши ряд випадкових (а точніше псевдо випадкових) чисел ξ_i натиском клавіш К, С4, розраховують середнє арифметичне генерованих псевдо випадкових чисел ξ_{cp}

$$\xi_{cp} = \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i}{n}, \quad (3.1)$$

де n – число випадкових чисел.

2. Розраховуються попередні значення похибок Δ_i за формулою

$$\Delta_i' = \xi_i - \xi_{cp}. \quad (3.2)$$

3. Знаходиться середня квадратична похибка попередніх істинних похибок за формулою Гаусса

$$m' \Delta_i = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \Delta_i'^2}{n}}. \quad (3.3)$$

4. Вичисляють коефіцієнт пропорційності K для визначення істинних похибок необхідної точності

$$K = \frac{C}{m' \Delta}, \quad (3.4)$$

де C – необхідна нормована константа.

Так, наприклад, при $m' \Delta_i = 0,283$ і необхідності побудови математичної моделі з точністю $C = 0,1$, будемо мати

$$K_{0,1} = \frac{0,1}{0,283} = 0,353,$$

а при $C = 0,05$, отримаємо $K_{0,05} = 0,177$.

7. Встановлення ключа переходу для зрівноваження коефіцієнтів математичної моделі і їх ваг при зменшенні значеннях X і Y

7.1. Постановка проблеми досліджень.

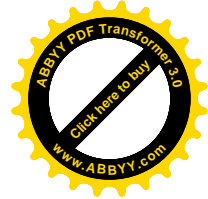
При оперуванні великими числами X і Y коефіцієнти нормальних рівнянь набувають великих значень, особливо при підведенні їх до шостої, п'ятої степені, а при одночасному опрацюванню їх з коефіцієнтами, вираженими в долях одиниці різко знижується точність результатів. Тому, доцільно перед початком опрацювання матеріалів зменшити значення X і Y у K разів. Таким шляхом ми і пішли, зменшивши значення X і Y у 100 раз. Провівши строге зрівноваження по способу найменших квадратів, і виконавши заключні контролі, ми впевнимося у правильності і коректності виконаної процедури строгого зрівноваження.

Але, на жаль, ми не можемо скористатися цими результатами строгого зрівноваження для знаходження дійсних значень x за дійсними значеннями X по отриманій формулі. Тому, нам необхідно встановити ключ переходу від результатів зрівноваження зі зменшеними параметрами X і Y до їх реальних значень.

Крім цього встановлений ключ переходу нам дасть можливість проведення широкомасштабних досліджень на спотворених математичних моделях по способу статистичних випробувань Монте Карло.

7.2. Формулювання теорем переходу.

Теорема 1. Якщо в початкових умовних рівняннях зменшити значення вихідних параметрів X і Y в K разів, (у нашому випадку у 100 разів) то, отриманий коефіцієнт a при x^3 із рішення нормальних рівнянь необхідно зменшити в 100^2 разів, тобто при коефіцієнті переходу K



Перш розрахунком по програмі слід ввести число рівнянь в стр 0, тобто пхпо; після набирають перший коефіцієнт в/о с/п. послідовно набираючи всі коефіцієнти і вільні члени (знаки вільних членів з правої сторони рівності (зі знаком «плюс»)). В кінці розрахунку одержують пхд-к1; пхс-к2; пхб-к3; пха-к4. Результати індукуються на дисплеї через натиск клавіші с/п. в новому рахунку обнулити всі оператори.

В результаті рішення системи нормальних рівнянь (5.3) отримали
 пхд=8,8028286; пхс=+0,028372721;
 пхб=-0,14404609; пха=0,12190277
 тобто
 $y=0,12190277x^3-0,14404609x^2+0,028372721x+8,8028286.$

При рішенні другої системи рівнянь виду (4.14)
 пхд=0,12190915; пхс=-0,1440566; пхб=+0,02837784;
 пха=8,802769

5. Істинні похибки розраховуються за формулою

$$\Delta_i = \Delta_i' \cdot K \quad (3.5)$$

6. Заключним контролем служить розрахунок середньої квадратичної похибки $m\Delta$ генерованих істинних похибок Δ

$$m\Delta = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \Delta^2}{n}}, \quad (3.6)$$

і порівняння

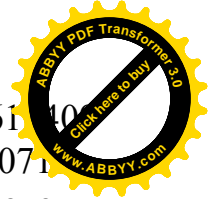
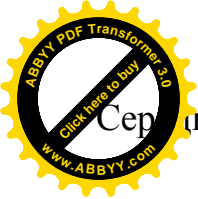
$$m\Delta = C.$$

Таблиця №4. Генерування псевдо випадкових чисел і розрахунок істинних похибок.

№ п/п	ξ_i	$-\xi_{cp.}$	Δ_i'	$\Delta_i'^2$	$\Delta_{i0,1}=0,353\Delta_i'$	$\Delta_i'^2_{0,1}$	$\Delta_{i0,05}=0,177\Delta_i'$	$\Delta_i'^2_{0,05}$
1	0,40	-0,53	-0,13	0,0169	-0,05	0,0025	-0,02	0,0004
2	0,87	-0,53	+0,34	0,1156	+0,12	0,0144	+0,06	0,0036
3	0,50	-0,53	-0,03	0,0009	-0,01	0,0001	-0,01	0,0001
4	0,17	-0,53	-0,36	0,1296	-0,13	0,0169	-0,06	0,0036
5	0,40	-0,53	-0,13	0,0169	-0,05	0,0025	-0,02	0,0004
6	0,91	-0,53	+0,38	0,1444	+0,13	0,0169	+0,06	0,0036
7	0,73	-0,53	+0,20	0,04	+0,07	0,0049	+0,03	0,0009
8	0,69	-0,53	+0,16	0,0256	+0,06	0,0036	+0,03	0,0009
9	0,14	-0,53	-0,39	0,1521	-0,14	0,0196	-0,07	0,0049
n=9	$\sum 4,81$	-4,77	+0,04	0,642	0	0,0814	0	0,0184

Середнє арифметичне генерованих випадкових чисел

$$\xi_{cp.} = \frac{\sum_{i=1}^9 \xi_i}{9} = \frac{4,81}{9} = 0,5344 \approx 0,53.$$



Середня квадратична похибка попередніх істинних похибок

$$m\Delta'i = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^9 \Delta'i^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{0,642}{8}} = 0,283.$$

Коефіцієнт пропорційності

$$C = 0,1$$

$$K = \frac{C}{m\Delta'i} = \frac{0,1}{0,283} = 0,353.$$

при генеруванні випадкових похибок з точністю 0,1 і $K=0,05/0,283 = 0,177$ при генеруванні похибок з точністю 0,05. Розраховуються істинні похибки $\Delta i_{0,1} = 0,353\Delta'i$ і $\Delta i_{0,05} = 0,177\Delta'i$.

Середня квадратична похибка при генеруванні з точністю 0,1

$$m_{\Delta 0,1} = \sqrt{\frac{0,084}{8}} = 0,100.$$

Середня квадратична похибка при генеруванні чисел з точністю 0,05

$$m_{\Delta 0,05} = \sqrt{\frac{0,0184}{8}} = 0,0479 \approx 0,05.$$

Таблиця №5. Побудова спотвореної моделі при $\Delta=0,1$ і $\Delta=0,05$

№п/п	$\phi_i=x_i$ істинна	$y'=M=f(x)$ модель	модель при $\Delta\phi=0,1^\circ$	$\Delta=0,1M$	модель при $\Delta\phi=0,05^\circ$	$\Delta=0,05 M$
1	0,00	8,803	-0,05	-0,05	-0,02	-0,02
2	11,25	8,957	+0,12	11,37	+0,06	11,31
3	22,50	8,851	-0,01	22,49	-0,01	22,49
4	33,75	8,598	-0,13	33,62	-0,06	33,69
5	45,00	8,274	-0,05	44,95	-0,02	44,98
6	56,25	8,011	+0,13	56,38	+0,06	56,31
7	67,50	7,904	+0,07	67,57	+0,03	67,53
8	78,75	8,057	+0,06	78,81	+0,03	78,78
9	90,00	8,575	-0,14	89,86	-0,07	89,93
n=9	$\Sigma 405,00$	$76,02 \cdot 10^{12}$	0	$\Sigma 405,00$	0	$\Sigma 405$

наприклад, з'являється 0,2185367, набирається 0,9061... В кінці з'являється контрольне значення 0,1524071

Таким чином, в результаті рішення другої схеми Гаусса ми отримали другу формулу кубічного полінома $y=0,12185367x^3 - 0,14397769x^2 + 0,02834832x + 8,802971$. (6.5)

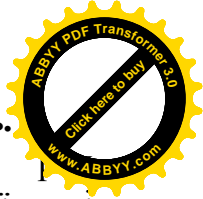
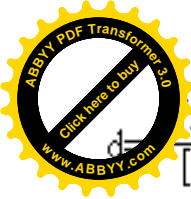
Хоча у цих двох схемах Гаусса ми рішали одну і ту ж систему рівнянь з абсолютно однаковими коефіцієнтами, але поміняними строчками і членами в строчках, із сумісного рішення цих рівнянь ми отримали коефіцієнти, які дещо відрізняються між собою. Але дані коефіцієнти повністю задовольняють ці рівняння і добре задовольняють заключні контролі. Це говорить про те, що ми абсолютно коректно виконали процедуру строгого зрівноваження.

Розходження в коефіцієнтах говорить про наявність в системі істинних залишкових похибок, які не в змозі повністю бути компенсованими процедурою строгого зрівноваження по способу найменших квадратів. Адже зрівноваження по способу найменших квадратів дає лише узгодження умовних рівнянь. Але при цьому ще залишаються істинні похибки, які із сумісного рішення систем рівнянь і дають такі розходження в коефіцієнтах.

В подальшому дані рівняння рішались на мікроЕОМ.

Програма №6. Рішення систем лінійних рівнянь при $n \leq 4$

Гпрг	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
00	хп4	1	4	Хп2	пхо	хп1	с/п	пх4	:	кхп2
10	FL1	06	1	4	хпз	пхо	хп1	FL1	23	кпх3
20	с/п	БП	19	Сх.	кхп2	FL1	24	кхп2	пхо	пх2
30	+	хп1	хп2	Пх3	-	Fх≠0	42	с/п	пп	84
40	БП	28	кпхо	пхо	хпз	с/п	кпх2	-	хп4	с/п
50	кпх2	-	пх4	:	кхп1	FL3	49	пх1	пхо	+
60	хп3	1	4	Хп1	хп2	кпх1	/-/	пп	84	пхз
70	+	хпз	пх1	-	Fх=0	65	пхо	хп1	кпх3	кпх2
80	FL1	78	БП	12	пхо	↔	В↑	кпхз	х	кпх1
90	+	кхп2	FO	FL0	86	FO	хпо	в/о	пхс	с/п
100	пхв	с/п	пха	с/п						



$$c = \frac{[x^0 y \cdot 3]}{[x^0 x^0 \cdot 3]} \cdot d \quad (6.1)$$

$$c = -\frac{[xy \cdot 2]}{[xx \cdot 2]} - \frac{[xx^0 \cdot 2]}{[xx \cdot 2]} \cdot d \quad (6.2)$$

$$b = -\frac{[x^2 y \cdot 1]}{[x^2 x^2 \cdot 1]} - \frac{[x^2 x^0 \cdot 1]}{[x^2 x^2 \cdot 1]} \cdot d - \frac{[x^2 x^2 \cdot 1]}{[x^2 x^2 \cdot 1]} \cdot c \quad (6.3)$$

$$a = -\frac{[x^3 y]}{[x^3 x^3]} - \frac{[x^3 x^0]}{[x^3 x^3]} \cdot d - \frac{[x^3 x]}{[x^3 x^3]} \cdot c - \frac{[x^3 x^2]}{[x^3 x^3]} \cdot b \quad (6.4)$$

При цьому коефіцієнт d випикується безпосередньо із 17 строчки d=+8,802971.

Із одинадцятої строчки c=0,69881804-7,6164027·10⁻²·8,802971=0,02834832.

Із шостої строчки b=+0,68623987-0,084074998·8,802971-3,1785937·0,02834832 =-0,14397703

Із другої строчки a=0,16819675-0,020364553·8,802971-1,5506759·0,02834832-1,2285553(-0,14397769) =0,16819675

Заключний контроль зручно виконувати по програмі №5.

Програма №5. Заключний контроль рішення нормальних рівнянь.

Фпрг	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
00	Cx	хпе	с/п	хпо	хпд	0	с/п	кхпо	пхо	1
10	-	Fx=0	06	пхд	хпо	кпхо	с/п	х	пхе	+
20	хпе	пхо	1	-	Fx=0	15	пхе	с/п	Cx	хпе
30	БП	13	F	АВТ						

Після натиску клавіш в/о с/п вводиться число визначених коефіцієнтів, збільшених на одиницю n+1 і після через натиск клавіші с/п вводяться послідовно визначені коефіцієнти зліва на право а с/п b с/п с с/п d с/п.

Автоматично на дисплеї з'являється визначений коефіцієнт, набирається відповідний коефіцієнт нормального рівняння і натискується клавіша с/п,

4. Представлення системи нормальних рівнянь.

Для визначеності положимо, що маємо 1 результатів залежності геомагнітного моменту земної кулі УМ від широти Xφ, виражених в числовій формі, функціональну залежність між якими нам необхідно виразити за допомогою полінома степені K, де коефіцієнти ai являються не відомими.

Тоді система початкових рівнянь (система рівнянь похибок) може бути записана у вигляді

$$\begin{aligned} a_1 X_1^k + a_2 X_1^{k-1} + a_3 X_1^{k-2} + \dots + a_k X_1 + a_{k+1} X_1^0 - y_1 &= V_1, \\ a_1 X_2^k + a_2 X_2^{k-1} + a_3 X_2^{k-2} + \dots + a_k X_2 + a_{k+1} X_2^0 - y_2 &= V_2, \\ \dots & \\ a_1 X_k^k + a_2 X_k^{k-1} + a_3 X_k^{k-2} + \dots + a_k X_k + a_{k+1} X_k^0 - y_k &= V_k, \\ a_1 X_{k+1}^k + a_2 X_{k+1}^{k-1} + a_3 X_{k+1}^{k-2} + \dots + a_k X_{k+1} + a_{k+1} X_{k+1}^0 - y_{k+1} &= V_{k+1}, \\ \dots & \\ a_1 X_n^k + a_2 X_n^{k-1} + a_3 X_n^{k-2} + \dots + a_k X_n + a_{k+1} X_n^0 - y_n &= V_n. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Помноживши кожну строчку цієї системи відповідно на $X_1^k, X_2^k, \dots, X_n^k$ і склавши їх між собою, отримаємо

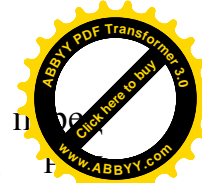
$$a_1 [x^k x^k] + a_2 [x^{k-1} x^k] + a_3 [x^{k-2} x^k] + \dots + a_k [xx^k] + a_{k+1} [x^0 x^0] - [yx^k] = [vx^k]; \quad (4.2)$$

де символом [] позначені суми (за Гауссом). Після помножимо кожну строчку системи (4.1) на $X_1^{k-1}, X_2^{k-1}, \dots, X_n^{k-1}$.

Додавши, будемо мати

$$a_1 [x^k x^{k-1}] + a_2 [x^{k-1} x^{k-1}] + a_3 [x^{k-2} x^{k-1}] + \dots + a_k [xx^{k-1}] + a_{k+1} [x^0 x^{k-1}] - [yx^{k-1}] = [vx^{k-1}]. \quad (4.3)$$

Продовжуючи і далі такі перетворення за допомогою послідовного множення строчок (4.1) відповідно на $X_1^{k-2}, X_1^{k-3}, \dots, X_1^0$ і їх додавання отримаємо ще K-1



аналітичних рівнянь.

В результаті будемо мати систему із K+1 перетворених рівнянь з K+1 невідомими.

$$\begin{aligned}
 a_1[x^k x^k] + a_2[x^{k-1} x^k] + \dots + a_{k+1}[x^0 x^k] - [yx^k] &= [vx^k]; \\
 a_1[x^k x^{k-1}] + a_2[x^{k-1} x^{k-1}] + \dots + a_{k+1}[x^0 x^{k-1}] - [yx^{k-1}] &= [vx^{k-1}]; \\
 \dots \dots \dots & \\
 a_1[x^k x^0] + a_2[x^{k-1} x^0] + \dots + a_{k+1}[x^0 x^0] - [yx^0] &= [vx^0];
 \end{aligned}
 \tag{4.4}$$

Розглядаючи цю систему, бачимо, що якщо прирівняти нулю ліві частини складаючих її рівнянь, то вона буде повністю співпадати із системою нормальних рівнянь, відрізняючись від неї тільки послідовністю строчок і членів в строчках.

Докажемо, що дійсно

$$[VX^k] = [VX^{k-1}] = \dots = [VX^0] = 0. \tag{4.5}$$

Для цього помножимо кожен строчку (4.1) відповідно на V₁, V₂, ..., V_n і результат просумуємо

$$a_1[x^k v] + a_2[x^{k-1} v] + \dots + a_{k+1}[x^0 v] - [yv] = [vv] \tag{4.6}$$

Із умови способу найменших квадратів

$$[VV] = \min, \tag{4.7}$$

положеного в основу визначення невідомих коефіцієнтів, слідує рівність нулю суми частинних похідних (4.7) по невідомим коефіцієнтам

$$\frac{\partial [v^2]}{\partial a_i} = 2 [V \cdot \frac{\partial v}{\partial a_i}] = 0 \tag{4.8}$$

В розгорнутому вигляді після скорочення на 2 це можна записати так

$$\begin{aligned}
 V_1 \cdot \frac{\partial V_1}{\partial a_1} + V_2 \cdot \frac{\partial V_2}{\partial a_1} + \dots + V_n \cdot \frac{\partial V_n}{\partial a_1} &= 0, \\
 V_1 \cdot \frac{\partial V_1}{\partial a_2} + V_2 \cdot \frac{\partial V_2}{\partial a_2} + \dots + V_n \cdot \frac{\partial V_n}{\partial a_2} &= 0,
 \end{aligned}
 \tag{4.9}$$

коефіцієнт с в передостанньому стовпчику перетвореного стовпчиком вільних членів. Другими словами, необхідно рішити систему нормальних рівнянь.

$$\begin{aligned}
 [x^3 x^3]a + [x^2 x^3]b + [x x^3]c + [x^0 x^3]d - [x^3 y] &= 0, \\
 [x^2 x^3]a + [x^2 x^2]b + [x x^2]c + [x^0 x^2]d - [x^2 y] &= 0, \\
 [x x^3]a + [x x^2]b + [x x]c + [x^0 x]d - [x y] &= 0, \\
 [x^0 x^3]a + [x^0 x^2]b + [x^0 x]c + [x^0 x^0]d - [x^0 y] &= 0.
 \end{aligned}$$

Таблиця 10. Коефіцієнти нормальних рівнянь

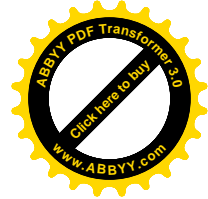
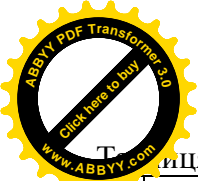
	x ³	x ²	x ¹	x ⁰	Y ¹	S ¹	Заключний контроль
[x ³]	0,90612409	1,1132236	1,4051048	1,8452813·10 ⁻²	-0,15240713	3,2904983	0,15240713
[x ²]		1,4051048	1,8452813	2,581875·10 ⁻²	-0,21293888	4,1764895	0,21293897
[x]			2,5818751	0,0405	-0,33525	5,5375111	0,33524999
[x ⁰]				0,0009	-0,007602	7,8069564·10 ⁻²	0,007602
Коеф.	+1,2185367·10 ⁻¹	-1,4397769·10 ⁻¹	+2,834832·10 ⁻²	+8,802971			
	a	b	c	d			

Таблиця 11. Рішення нормальних рівнянь (друга схема Гаусса).

№п/п	x ³]a	x ²]b	x]c	x ⁰]d	y	Σ	контроль
1	[x ³]	0,90612409	1,1132236	1,4051048	1,8452813·10 ⁻²	-0,15240713	3,2904983
2		-1	-1,2285553	-1,5506759	-2,0364553·10 ⁻²	+1,6819675·10 ⁻¹	-3,6313989
3	[x ²]		1,4051048	1,8452813	2,581875·10 ⁻²	-2,1293888·10 ⁻¹	4,1764895
4			-1,3676567	-1,726249	-2,2670301·10 ⁻²	+0,18724059	-4,0425591
5			0,0374481	0,1190323	+3,148449·10 ⁻³	-2,569838·10 ⁻²	+0,1339304
6			-3,1785937	-8,4074998·10 ⁻²	+0,68623987	-3,576427	-3,576428
7	[x]		2,5818751	0,0405	-0,33525	5,5375111	
8			-2,1788621	-2,8614331·10 ⁻²	+2,3633406·10 ⁻¹	-5,1024963	
9			-3,7835531·10 ⁻¹	-1,000764·10 ⁻²	+8,1684701·10 ⁻²	-4,2571033·10 ⁻¹	
10		[xx ²]=	2,465769·10 ⁻²	1,878029·10 ⁻³	-1,7231239·10 ⁻²	+9,3045·10 ⁻³	+9,3045·10 ⁻³
11			-1	-7,6164027·10 ⁻²	+6,9881804·10 ⁻¹	-3,7734678·10 ⁻¹	-3,77346·10 ⁻¹
12	[x ⁰]			0,0009	-0,007602	7,8069564·10 ⁻²	
13				-3,7578328·10 ⁻¹	+3,1037031·10 ⁻³	-6,7009528·10 ⁻²	
14				-2,6470584·10 ⁻¹	2,1605912·10 ⁻³	-1,1260198·10 ⁻²	
15		[x ² x ²]=	2,595118·10 ⁻¹	-1,4303825·10 ⁻¹	1,3124005·10 ⁻³	-7,0866819·10 ⁻¹	
16		[x ⁰ x ³]=	Pd=	1,1647263·10 ⁻¹	-1,0253052·10 ⁻²	-9,0883015·10 ⁻¹	-9,08832·10 ⁻¹
17				-1	-8,802971	+7,8034658	+7,803
18		0,16819675	0,68623987	0,69881804	+8,802971		
19	d-	-2,0364553·10 ⁻²	-0,084074998d	-0,076164027d	d		
20	c-	-1,5506759	-3,1785937c	+0,02834832			
21	b-	-1,2285553	-0,14397769	c			
22		+0,12185367	b				
23		a					

Останній контроль в даній схемі говорить, що похибка можлива у четвертій значущій цифрі. Це визвано діленням на число 0,00011647263. У заключних контролях найбільше розходження у сьомій значущій цифрі після коми говорить про цілком надійні і добрі результати.

Невідомі коефіцієнти a, b, c, d розраховуються за слідуєчими формулами, які приводяться в позначеннях Гаусса



6.Рішення нормальних рівнянь

Таблиця 9. Перша схема Гаусса.

n/n		x ² d	xjc	x ² b	x ² a	y	Σ	контроль
1	x ³	0,0009	0,0405	2,5818751·10 ⁻²	1,8452813·10 ⁻²	-0,7602·10 ⁻²	7,8069564·10 ⁻²	
2		-1	-44,999999	-28,6875	-20,503125	8,4466665	-86,743959	-86,743957
3	x		2,5818751	1,8452813	1,4051048	-0,33525	5,5315111	
4			-1,8225	-1,1618438	-0,83037656	3,4208999·10 ⁻¹	-3,5131303	
5	Σ		0,7593751	0,6834375	0,5747283	6,83999·10 ⁻³	2,0243808	2,0243809
6			-1	-0,8999984	-0,75684372	-9,0073926·10 ⁻³	-2,6658507	-2,6658509
7	x ²		1,4051048	1,1132236	0,21293888	4,1764895		
8			-0,74067541	-0,52936507	0,21808238	-2,2396207		
9			-0,61509364	-0,51725538	-6,1559899·10 ⁻³	-1,8219423		
10	Σ		[x ² x ²]=	4,933576·10 ⁻²	6,660312·10 ⁻²	-1,0124899·10 ⁻²	0,1149265	0,11492639
11			-1	-1,3499968	2,0522434·10 ⁻²	-2,3294766	-2,3294744	
12	x ³			0,90612409	-0,15240713	3,2904983		
13				-3,7834033·10 ⁻¹	1,5586476·10 ⁻¹	-1,6006701		
14				-4,349795·10 ⁻¹	-5,1768034·10 ⁻²	-1,5321398		
15			[x ³ x ²]=	9,280426·10 ⁻²	-8,9913998·10 ⁻²	1,3668581·10 ⁻²	-1,5515041·10 ⁻¹	
16	Σ		[x ³ x ³]=	Pa=	2,890262·10 ⁻²	-3,523153·10 ⁻¹	0,002538	0,0025379467
17				-1	1,2189736·10 ⁻¹	-0,87812107	-0,8781	
18		8,4466665	-9,0073926·10 ⁻³	2,0522434·10 ⁻²	0,12189736			
19	ax	-20,503125a	-0,75684372a	-1,3499968a	a			
20	bx	-28,6875b	-0,8999984b	-0,14403861				
21	cx	-44,999999	0,028370087	b				
22		8,802838	C					
23		d						

Коефіцієнт a=+0,12189736 вписуємо безпосередньо із схеми Гаусса (див.17 строчки).

Коефіцієнт b розраховується на основі даних 11 строчки

b=-1,3499968·0,12189736+0,020522434=-0,14403861.

Коефіцієнт c розраховується на основі даних 6 строчки

c=-0,89999984 b-0,75684372a-9,0073926·10⁻³=+0,0028370087.

Коефіцієнт d розраховується на основі даних 2 строчки

d=-44,999999 c-28,6875 b-20,503125a+8,4466665=+8,802838.

Визначені коефіцієнти a, b, c, d вписуються у відповідний стовпчик таблиці коефіцієнтів нормальних рівнянь і виконується заключний контроль по приведеним вище формулам.

По дані схемі Гаусса можна визначити обернені ваги останнього a і передостаннього b коефіцієнтів для розрахунку точності зрівноважених елементів.

З метою визначення обернених ваг коефіцієнтів d і c, переставимо строчки системи нормальних рівнянь і члени в строчках так, щоб коефіцієнт d був на останньому місці, а

$$V_1 \cdot \frac{\partial V_1}{\partial a_{k+1}} + V_2 \cdot \frac{\partial V_2}{\partial a_{k+1}} + \dots + V_n \cdot \frac{\partial V_n}{\partial a_{k+1}} = 0.$$

Це і є система нормальних рівнянь, витікаючи із (4.6).

Але із (4.1) слідує

$$\frac{\partial V_1}{\partial a_1} = X_1^k; \quad \frac{\partial V_2}{\partial a_1} = X_2^k, \dots, \quad \frac{\partial V_n}{\partial a_1} = X_n^k,$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial a_2} = X_1^{k-1}; \quad \frac{\partial V_2}{\partial a_2} = X_2^{k-1}, \dots, \quad \frac{\partial V_n}{\partial a_2} = X_n^{k-1}, \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial a_{k+1}} = X_1^0; \quad \frac{\partial V_2}{\partial a_{k+1}} = X_2^0, \dots, \quad \frac{\partial V_n}{\partial a_{k+1}} = X_n^0.$$

Підставляючи ці значення в (4.9), будемо мати

$$\begin{aligned} [VX^k] &= 0, \\ [VX^{k-1}] &= 0, \\ \dots & \\ [VX^0] &= 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Таким чином, система нормальних рівнянь буде мати вигляд

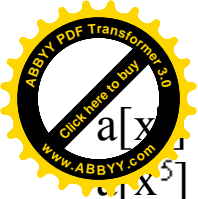
$$\begin{aligned} a_1[x^k x^k] + a_2[x^{k-1} x^k] + \dots + a_{k+1}[x^0 x^k] - [y x^k] &= 0 \\ a_1[x^k x^{k-1}] + a_2[x^{k-1} x^{k-1}] + \dots + a_{k+1}[x^0 x^{k-1}] - [y x^{k-1}] &= 0; \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$a_1[x^k x^0] + a_2[x^{k-1} x^0] + \dots + a_{k+1}[x^0 x^0] - [y x^0] = 0;$$

Для поліному виду (1.1) система нормальних рівнянь буде

$$\begin{aligned} dn + c[x] + b[x^2] + a[x^3] - [y] &= 0; \\ d[x] + c[x^2] + b[x^3] + a[x^4] - [xy] &= 0; \\ d[x^2] + c[x^3] + b[x^4] + a[x^5] - [x^2y] &= 0; \\ d[x^3] + c[x^4] + b[x^5] + a[x^6] - [x^3y] &= 0. \end{aligned} \quad (4.13)$$

При проведенні досліджень нам буде необхідно представити систему (4.13) у вигляді



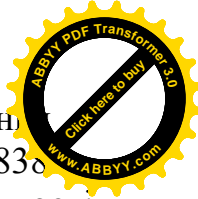
$$\begin{aligned}
 a[x^5] + b[x^5] + c[x^4] + d[x^3] - [x^3y] &= 0; \\
 a[x^5] + b[x^4] + c[x^3] + d[x^2] - [x^2y] &= 0; \\
 a[x^4] + b[x^3] + c[x^2] + d[x] - [xy] &= 0; \\
 a[x^3] + b[x^2] + c[x] + dn - [y] &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{4.14}$$

В подальшому будемо рishати систему лiнiйних нормальних рiвнянь (4.13) i (4.14) одним iз вiдомих в математицi способiв.

В данiй роботi ми будемо рishати систему нормальних рiвнянь по системi Гаусса послiдовного виключення невидомих i як контрольне рiшення буде виконано на мiкроЕОМ по розробленiй автором програмi.

На основi проведених розрахункiв сформуємо систему нормальних рiвнянь, загальний вигляд яких буде

$$\begin{aligned}
 na_0 + a_1[x] + a_2[x^2] + \dots + a_m[x^m] - [y] &= 0, \\
 a_0[x] + a_1[x^2] + a_2[x^3] + \dots + a_m[x^{m+1}] - [xy] &= 0, \\
 a_0[x^2] + a_1[x^3] + a_2[x^4] + \dots + a_m[x^{m+2}] - [x^2y] &= 0, \\
 \dots \dots \dots & \\
 a_0[x^m] + a_1[x^{m+1}] + a_2[x^{m+2}] + \dots + a_m[x^{2m}] - [x^m y] &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{4.15}$$



представлених в числовому видi (5.3) отримаємо рiвняння
 $y = 0,12189736x^3 - 0,14403861x^2 + 0,028370087x + 8,802838$
 що i являється математичною моделлю залежностi магнiтного моменту планети Земля вiд широти пункту спостереження.

Оцiнимо якiсть рiшення нормальних рiвнянь по схемi Гаусса за формулами заключного контролю (5.5)

$$\begin{aligned}
 0,0009 \cdot 8,802838 + 0,0405 \cdot 0,028370087 + 2,5818751 \cdot 10^{-2} \cdot \\
 (-0,14403861) + 1,8452813 \cdot 10^{-2} \cdot 0,12189736 &= 0,007602; \\
 0,0405 \cdot 8,802838 + 2,581875 \cdot 0,028370087 + 1,8452813 \cdot \\
 (-0,14403861) + 1,4051248 \cdot 0,12189736 &= 0,33525; \\
 2,5818751 \cdot 10^{-2} \cdot 8,802838 + 1,8452813 \cdot 0,028370087 + 1,4051048 \cdot \\
 (-0,14403861) + 1,1132236 \cdot 0,12189736 &= 0,2129387; \\
 1,8452813 \cdot 10^{-2} \cdot 8,802838 + 1,4051048 \cdot 0,028370087 + 1,1132236 \cdot \\
 (-0,14403861) + 0,90612409 \cdot 0,12189736 &= 0,15240703.
 \end{aligned}$$

Як бачимо, в контрольних рiвняннях забезпечується чiтко точнiсть в шiсть значущих цифр пiсля коми, що говорить про коректнiсть i вiрнiсть рiшення.



$$0,0009d + 0,0405c + 2,5818751 \cdot 10^{-2}b + 1,8452813 \cdot 10^{-2}a - 0,7602 \cdot 10^{-3} = 0,$$

$$0,0405d + 2,5818751c + 1,8452813b + 1,4051048a - 0,33525 = 0,$$

$$0,025818751d + 1,8452813c + 1,4051048b + 1,1132236a - 0,21293888 = 0,$$

$$0,018452813d + 1,4051048c + 1,1132236b + 0,90612409a - 0,15240713 = 0. \quad (5.3)$$

Сформуємо таблицю коефіцієнтів нормальних рівнянь.

Таблиця 8. Коефіцієнти нормальних рівнянь.

x^0	x^1	x^2	x^3	Y	S	Контроль
0.0009	0.0405	$2.5818751 \cdot 10^{-2}$	$1.8452813 \cdot 10^{-2}$	$-7.602 \cdot 10^{-3}$	$7.8069564 \cdot 10^{-2}$	$7.8069564 \cdot 10^{-2}$
x	2.5818751	1.8452813	1.4051048	-0.33525	5.5375111	5.5375112
x^2		1.4051048	1.1132236	-0.21293888	4.1764895	4.1764897
x^3			0.90612409	-0.15240713	3.2904983	3.2904981
коэф	8.802838	0.028370087	-0.14403861	0.12189736		
d	e	b	a			

Виконання контрольних рівнянь сум

$$[x^0 x^0] + [x^0 x] + [x^0 x^2] + [x^0 x^3] - [x^0 y] = [x^0 s],$$

$$[x^0 x] + [xx] + [xx^2] + [xx^3] - [xy] = [xs],$$

$$[x^0 x^2] + [xx^2] + [x^2 x^2] + [x^2 x^3] - [x^2 y] = [x^2 s],$$

$$[x^0 x^3] + [xx^3] + [x^2 x^3] + [x^3 x^3] - [x^3 y] = [x^3 s]. \quad (5.4)$$

І в нашому випадку

$$0,0009 + 0,0405 + 2,5818751 \cdot 10^{-2} + 1,8452813 \cdot 10^{-2} - 7,602 \cdot 10^{-3} = 7,8069564$$

$$0,0405 + 2,5818751 + 1,8452813 + 1,4051048 - 0,33525 = 5,5375112$$

$$2,5818751 \cdot 10^{-2} + 1,8452813 + 1,4051048 + 1,1132236 - 0,21293888 = 4,1764897$$

$$1,8452813 \cdot 10^{-2} + 1,4051048 + 1,1132236 + 0,90612409 - 0,15240713 = 3,2904981$$

В дальнішому приступають до розв'язання системи рівнянь

$$[x^0 x^0]d + [x^0 x]c + [x^0 x^2]b + [x^0 x^3]a - [x^0 y] = 0,$$

$$[x^0 x]d + [xx]c + [xx^2]b + [xx^3]a - [xy] = 0,$$

$$[x^0 x^2]d + [xx^2]c + [x^2 x^2]b + [x^2 x^3]a - [x^2 y] = 0, \quad (5.5)$$

$$[x^0 x^3]d + [xx^3]c + [x^2 x^3]b + [x^3 x^3]a - [x^3 y] = 0.$$

Після рішення системи нормальних рівнянь (5.5),

5. Визначення коефіцієнтів нормальних рівнянь

Для того, щоб не було великих значень коефіцієнтів зменшимо значення X і Y в 100 раз, відповідно в 100 раз зменшимо значення вільних членів.

Таблиця 6. Обчислювальна таблиця коефіцієнтів нормальних рівнянь.

№ п/п	X	Y	X ²	X ³	X ⁴	S	X ² Y	X ³ Y	X ⁴ Y
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,000	0,0879	0,01	0	0	-0,0779	0	0	0
2	0,1125	0,0890	0,01	$1,265625 \cdot 10^{-2}$	$1,423828 \cdot 10^{-2}$	$4,758008 \cdot 10^{-2}$	$2,0272864 \cdot 10^{-2}$	$1,8020324 \cdot 10^{-2}$	$1,6018066 \cdot 10^{-2}$
3	0,225	0,0905	0,01	$5,0625 \cdot 10^{-2}$	$1,1390625 \cdot 10^{-1}$	$2,0651563 \cdot 10^{-1}$	$1,2974633 \cdot 10^{-1}$	$5,7665039 \cdot 10^{-1}$	$2,5628906 \cdot 10^{-1}$
4	0,3375	0,0850	0,01	$1,1390625 \cdot 10^{-1}$	$3,8443359 \cdot 10^{-1}$	$4,1484961 \cdot 10^{-1}$	$4,3789388 \cdot 10^{-1}$	$4,3789388 \cdot 10^{-1}$	$1,2974634 \cdot 10^{-1}$
5	0,45	0,0818	0,01	$2,025 \cdot 10^{-1}$	$9,1125 \cdot 10^{-1}$	$6,71825 \cdot 10^{-1}$	$8,3037656 \cdot 10^{-1}$	$1,8452813 \cdot 10^{-1}$	$4,106625 \cdot 10^{-1}$
6	0,5625	0,0800	0,01	$3,1640625 \cdot 10^{-1}$	$1,7797852 \cdot 10^0$	$9,868848 \cdot 10^0$	$3,1676353 \cdot 10^0$	$5,6313516 \cdot 10^0$	$1,0011292 \cdot 10^1$
7	0,6750	0,0795	0,01	$4,55625 \cdot 10^{-1}$	$3,0754688 \cdot 10^0$	$1,3686719$	$9,4585083 \cdot 10^0$	$1,4012605 \cdot 10^1$	$2,0759414 \cdot 10^1$
8	0,7875	0,0812	0,01	$6,2015625 \cdot 10^{-1}$	$4,8837305 \cdot 10^0$	$1,8248293$	$2,3850824 \cdot 10^1$	$3,028676 \cdot 10^1$	$3,8459378 \cdot 10^1$
9	0,900	0,0853	0,01	0,81	0,729	2,3637	$5,31441 \cdot 10^1$	$5,9049 \cdot 10^1$	0,6561
n=9	$\Sigma 4,05$	0,7602	0,09	2,5818751	1,8452813	7,8069563	0,90612409	1,1132236	1,4051048

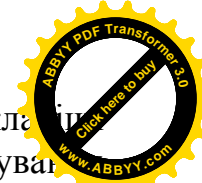
Продовження таблиці 6.

№ п/п	X	Y	X ² Y	X ³ S	X ² Y	X ³ S	XY	XS
1	2	3	11	12	13	14	15	16
1	0,00	0,0879	0	0	0	0	0	0
2	0,1125	0,0890	$1,267207 \cdot 10^{-4}$	$6,7745854 \cdot 10^{-5}$	$1,1264063 \cdot 10^{-3}$	$6,0218538 \cdot 10^{-4}$	$1,00125 \cdot 10^{-2}$	$5,352759 \cdot 10^{-3}$
3	0,225	0,0905	$1,0308516 \cdot 10^{-3}$	$2,352342 \cdot 10^{-3}$	$4,5815625 \cdot 10^{-3}$	$1,0454854 \cdot 10^{-2}$	$2,03625 \cdot 10^{-2}$	$4,6466016 \cdot 10^{-2}$
4	0,3375	0,0850	$3,2676855 \cdot 10^{-3}$	$1,5948212 \cdot 10^{-2}$	$9,6820312 \cdot 10^{-3}$	$4,7253963 \cdot 10^{-2}$	$2,86875 \cdot 10^{-2}$	$1,4001174 \cdot 10^{-1}$
5	0,45	0,0818	$7,454025 \cdot 10^{-3}$	$6,1220053 \cdot 10^{-2}$	$1,65645 \cdot 10^{-2}$	$1,3604456 \cdot 10^{-1}$	$3,681 \cdot 10^{-2}$	$3,023212 \cdot 10^{-1}$
6	0,5625	0,0800	$1,4238282 \cdot 10^{-2}$	$1,756443 \cdot 10^{-1}$	$2,53125 \cdot 10^{-2}$	$3,1225652 \cdot 10^{-1}$	$4,5 \cdot 10^{-2}$	$5,551227 \cdot 10^{-1}$
7	0,6750	0,0795	$2,4449977 \cdot 10^{-2}$	$4,2093077 \cdot 10^{-1}$	$3,6222188 \cdot 10^{-2}$	$6,2360113 \cdot 10^{-1}$	$5,36625 \cdot 10^{-2}$	$9,2385353 \cdot 10^{-1}$
8	0,7875	0,0812	$3,9655892 \cdot 10^{-2}$	$8,911745 \cdot 10^{-1}$	$5,035668 \cdot 10^{-2}$	$1,1316793$	0,063945	1,4370531
9	0,900	0,0853	0,0621837	1,7231373	0,069093	1,914597	0,07677	2,12733
n=9	$\Sigma 4,05$	0,7602	0,15240713	3,2904983	0,21293888	4,1764895	0,33525	5,5375111

Коефіцієнти нормальних рівнянь зручно розраховувати за розробленою автором програмою на програмованому мікрокалькуляторі «Електроніка МК61 або 52». Програма вдосконалена у порівнянні з попередньою, представленою в математичній частині досліджень. В даній програмі визначаються параметри S, X³S, X²S, XS, чого немає в попередній.

Програма №3. Послідовний розрахунок коефіцієнтів нормальних рівнянь

Гпрг	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
00	хс/п	хпе	ус/п	х/пd	пхе	Fх ²	хп2	с/п	пхе	х
10	хпз	с/п	пх2	+	пхе	+	пхd	-	0	.
20	0	1	+	Хп4	с/п	пх3	Fх ²	с/п	пх3	пх2
30	х	с/п	пхз	пхе	х	с/п	пх3	пхd	х	с/п
40	пзх	пх4	х	с/п	пх2	пхd	х	с/п	пх2	пх4
50	х	с/п	пхе	пхd	х	с/п	пхе	пх4	х	с/п
60	0	БП	00	F	АВТ					



Натиснувши клавіші в/о с/п, набирають значення X_i , натискаючи клавішу с/п (пуск), набирають значення Y_i і с/п і послідовно зчитують з дисплея через натиск клавіші с/п $x^2, x^3, s, x^6, x^5, x^4, x^3u, x^3s, x^2u, x^2s, xy, xs$.

Після через натиск клавіші с/п вводять нові параметри $x, y \dots$ В регістрах пам'яті одного циклу зберігаються наступні дані: X в регістрі e , Y в регістрі d , x^2 в регістрі 2 , x^3 в регістрі 3 , S в регістрі 4 .

Параметри S розраховують за формулою

$$S = X - Y + X^2 + X^3 - X^0. \quad (5.1)$$

Якщо коефіцієнт не зменшують, то $X^0 = 1$, при зменшенні коефіцієнтів у 100 раз $X^0 = 0,01$. В програмі проставлена константа 0,01, тому що ми всі коефіцієнти зменшили в 100 раз. Якщо коефіцієнти не зменшують, то в 18 операторі ставлять 1, а в 19, 20 і 21 команду КНОП. При цьому нам необхідно буде зменшити коефіцієнти і вільні члени рівняння в 0,01 там де буде x^0 .

Коли немає необхідності заповнювати таблицю 6, розроблена програма №4 розрахунку коефіцієнтів нормальних рівнянь.

Програма №4. Повний розрахунок коефіцієнтів нормальних рівнянь.

Фпрг	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
00	с/п	хп1	с/п	хпо	Фх ²	хп2	Фх ²	хп4	пх2	х
10	пха	+	хпа	пх2	пхо	х	хп3	пх2	х	пх9
20	+	хп9	пхо	пхе	+	хпе	пх2	пх7	+	хп7
30	пх3	пх8	+	хп8	пх1	пх2	х	пхс	+	хпс
40	пх1	пх3	х	пхd	+	хпd	пх1	пх6	+	хп6
50	пх4	пх5	+	хп5	пхо	пх1	х	пхв	+	пхв
60	0	БП	00	пхе	с/п	пх6	с/п	пх7	с/п	пх8
70	с/п	пх5	с/п	пх9	с/п	пха	с/п	пхв	с/п	пхс
80	с/п	пхd	с/п	сх	хп5	хп6	хп7	хп8	хп9	хпа
90	хпв	хпс	хпd	хпе	00 БП	00	F	АВТ		

Після набору Y і с/п, X і с/п йде розрахунок по програмі до індикації 0. після, через натиск клавіші с/п послідовно вводять значення $Y_i, X_i \dots$

Провівши всі розрахунки, натиском клавіші с/п безумовного переходу БП 62 с/п переходять до зчитування послідовно даних $[x], [y], [x^2], [x^3], [x^4], [x^5], [x^6], [xy], [x^2y], [x^3y]$.

При збої програми потрібно обнулити суматори натиском клавіш БП 82 с/п.

Таблиця 7. Розподіл змінних

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d	e	
x	y	x^2	x^3	x^4	$\sum x^4$	$\sum y$	$\sum x^2$	$\sum x^3$	$\sum x^5$	$\sum x^6$	$\sum xy$	$\sum x^2y$	$\sum x^3y$	$\sum x$	

На основі даних табл.6 сформуємо перше нормальне рівняння виду

$$dn + c[x] + b[x^2] + a[x^3] - [y] = 0, \quad (5.1)$$

І в нашому випадку перше контрольне рівняння суми.
 $[x^0x^0] + [x^0x] + [x^0x^2] + [x^0x^3] - [x^0y] = [x^0s]. \quad (5.2)$

Для включення даного рівняння в загальну систему нормальних рівнянь необхідно ліву і праву частину даного контрольного рівняння помножити на 0,01 у зв'язку з тим, що всі коефіцієнти ми зменшили в 100 раз, але в першому рівнянні необхідно врахувати квадратичний коефіцієнт $[x^0x^0]$

Таким чином на основі розрахункової таблиці 6 маємо перше контрольне рівняння сум

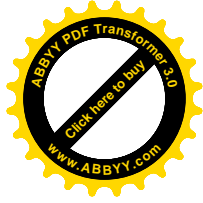
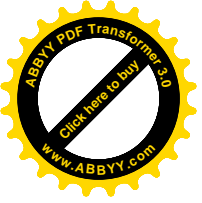
$$0,09 + 4,05 + 2,5818751 + 1,8452813 - 0,7602 = 7,8069564$$

Помноживши всі коефіцієнти на 0,01 отримаємо контрольну суму

$$0,0009 + 0,0405 + 2,5818751 \cdot 10^{-2} + 1,8452813 \cdot 10^{-3} - 0,7602 \cdot 10^{-2} = 7,8069564 \cdot 10^{-2}$$

Коефіцієнти всіх остальных нормальних рівнянь змін не зазнають.

Таким чином, в результаті розрахунку коефіцієнтів нормальних рівнянь ми отримали наступну систему нормальних рівнянь.



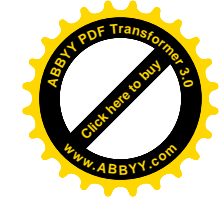
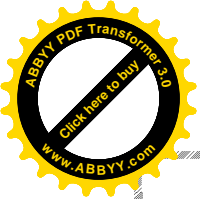
Літнарівч Руслан Миколайович
доцент, кандидат технічних наук

ДОСЛІДЖЕННЯ ТОЧНОСТІ АПРОКСИМАЦІЇ
ЗАЛЕЖНОСТІ МАГНІТНОГО МОМЕНТУ
ЗЕМЛІ ВІД ШИРОТИ МЕТОДОМ
СТАТИСТИЧНИХ ВИПРОБУВАНЬ
МОНТЕ КАРЛО

Частина 1

Комп'ютерний набір, верстка, редагування і дизайн у
редакторі Microsoft office 2003:
Дзюбишина Галина Василівна
Дзюбишина Наталія Василівна

Міжнародний Економіко-Гуманітарний університет
ім. акад. С.Дем'янчука
33027, м. Рівне, вул. акад. С.Дем'янчука, 4



Міністерство освіти і науки України
Міжнародний економіко-гуманітарний університет
імені академіка
Степана Дем'янчука

Р. М. Літнарівч

Встановлення зв'язку між географічною і геомагнітною системами координат

Частина 2

м. Рівне, 2006

УДК 629.123.053.12

Літнарівч Р.М. Встановлення зв'язку між
географічною і геомагнітною системами координат.
Частина 2. МЕНУ, Рівне, 2006, - ст..

Рецензенти:

В.Г.Бурачек, доктор технічних наук, професор
Є.С.Парняков, доктор технічних наук, професор
В.О.Боровий, доктор технічних наук, професор

Відповідальний за випуск:

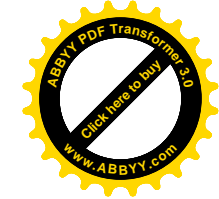
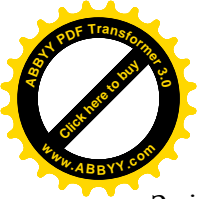
Й.В.Джунь, доктор фізико-математичних наук,
професор

Встановлений зв'язок між географічною і
геомагнітною системами координат. Приводиться від
форму і даються приклади обчислень.

Для спеціалістів, які займаються вивченням
геомагнітного поля Землі.

Буде корисна студентам-географам і аспірантам.

© Р.М.Літнарівч



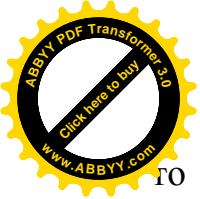
Зміст

Передмова

	Стор.
1. Встановлення зв'язку між географічною і геомагнітною системами координат.....	4
2. Визначення азимута і віддалі між двома станціями спостережень.....	11
3. Визначення координат станції спостереження.....	19
4. Встановлення залежності між кутом нахилу магнітної стрілки і геомагнітною широтою пункту спостережень.....	22
5. Апроксимація залежності вертикальної складової B_z індукції магнітного поля Землі від геомагнітної широти.....	27
6. Апроксимація залежності горизонтальної складової індукції магнітного поля Землі від геомагнітної широти.....	31
7. Апроксимація залежності індукції поля однорідного намагнічування земної кулі від геомагнітної широти.....	33
8. Апроксимація залежності магнітного моменту земної кулі від широти.....	35
9. Дослідження залежності сили струму тангенціального гальванометра від широти пункту спостереження.....	37
10. Представлення вертикальної складової індукції геомагнітного поля Землі через горизонтальну.....	42
Висновки.....	43
Література.....	45

1. ВСТАНОВЛЕННЯ ЗВ'ЯЗКУ МІЖ ГЕОГРАФІЧНОЮ І ГЕОМАГНІТНОЮ СИСТЕМАМИ КООРДИНАТ

Точки на поверхні Землі, де перетинаються магнітні меридіани, називаються магнітними полюсами Землі. В магнітних полюсах вектор індукції магнітного поля Землі досягає максимальної величини і направлений під прямим кутом вниз на північному і вгору на південному полюсах. Магнітні полюси Землі не співпадають із географічними полюсами і розташовані в глибині Землі. На 1975 рік координати північного магнітного полюса $\varphi=75^{\circ}33'$ пн.ш., $\lambda=100^{\circ}23'$ з.д. – острів Батерст, Канадський архіпелаг; південного – $\varphi=66^{\circ}05'$ пд.ш., $\lambda=139^{\circ}36'$ с.д. – Східна Антарктида. Всі елементи земного магнетизму зазнають періодичних коливань із добовим і річним ходом, а також з року в рік – вікові коливання. Протягом геологічної історії Землі поряд із значним переміщенням магнітних полюсів неодноразово змінювалася їх полярність. В нашу епоху у північній півкулі знаходиться південний (від'ємний) магнітний полюс, а в південній – північний (позитивний). Магнітні силові лінії виходять із позитивного і входять у від'ємний полюс. Але магнітні полюси прийнято називати у відповідності із півкулею, в якій кожний із них знаходиться. Спостереження за змінами магнітного поля Землі здійснюється службою земного



ГО

$$\Delta\lambda = \lambda_{\text{пол}} + \lambda_A = 100^\circ 23' + 26^\circ 07,5' = 126^\circ 30,5'.$$

Полюсний елемент дуги географічного меридіану p розраховується за формулою

$$p = 90^\circ - \varphi_{Г.а} \quad (1.1)$$

і в нашому випадку

$$p = 90^\circ - 50^\circ 45,0' = 39^\circ 15,0'.$$

Скористаємося теоремою косинусів для сферичного трикутника $P_M P_G A$:

косинус сторони сферичного трикутника дорівнює добутку косинусів двох других його сторін, плюс добуток синусів тих же сторін, помножених на косинус кута між ними.

$$\cos p' = \cos \varepsilon \cos p + \sin \varepsilon \sin p \cos \Delta\lambda. \quad (1.2)$$

або

$$p' = \arccos[\cos \varepsilon \cos p + \sin \varepsilon \sin p \cos \Delta\lambda]. \quad (1.3)$$

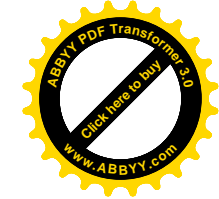
І в нашому випадку

$$p' = \arccos[\cos 11,5^\circ \cos 39^\circ 15' + \sin 11,5^\circ \sin 39^\circ 15' \cos 126^\circ 30,5'] = 46,85868505^\circ = 46^\circ 51' 31,3''.$$

Тепер у нас з'являється можливість визначити кут δ між магнітним і географічним меридіанами в точці А, тобто постійну складову схилення магнітної стрілки. Для цього використаємо теорему синусів, яка у випадку сферичного трикутника формулюється наступним чином:

Синуси сторін пропорційні синусам кутів, тобто

$$\frac{\sin \delta}{\sin \varepsilon} = \frac{\sin \Delta\lambda}{\sin p'}. \quad (1.4)$$



При цьому

$$\sin \delta = \frac{\sin \varepsilon \sin \Delta\lambda}{\sin p'}; \quad (1.5)$$

або

$$\delta = \arcsin\left[\frac{\sin \varepsilon \sin \Delta\lambda}{\sin p'}\right]. \quad (1.6)$$

Тоді

$$\delta = \arcsin\left[\frac{\sin 11,5^\circ \sin 126^\circ 30,5'}{\sin 46,85868505^\circ}\right] = 12,68639607^\circ = 12^\circ 41' 11'' 0.$$

Визначимо кут λ' :

$$\frac{\sin \lambda'}{\sin p} = \frac{\sin \Delta\lambda}{\sin p'}. \quad (1.7)$$

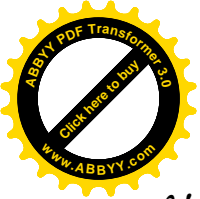
При цьому

$$\sin \lambda' = \frac{\sin p \sin \Delta\lambda}{\sin p'}, \quad (1.8)$$

або

$$\lambda' = \arcsin\left[\frac{\sin p \sin \Delta\lambda}{\sin p'}\right]. \quad (1.9)$$

І в нашому випадку



$$\lambda' = \arcsin \left[\frac{\sin 39^\circ 15' \sin 126^\circ 30,5'}{\sin 46,85868505^\circ} \right] =$$

$$= 44,18354444^\circ = 44^\circ 11' 00,76''.$$

І контрольне визначення

$$\frac{\sin \delta}{\sin \varepsilon} = \frac{\sin \lambda'}{\sin p}, \quad (1.10)$$

тоді

$$\sin \delta = \frac{\sin \varepsilon \sin \lambda'}{\sin p}, \quad (1.11)$$

або

$$\delta = \arcsin \left[\frac{\sin \varepsilon \sin \lambda'}{\sin p} \right], \quad (1.12)$$

і

$$\delta = \arcsin \left[\frac{\sin 11,5^\circ \sin 44,18354444^\circ}{\sin 39^\circ 15'} \right] =$$

$$= 12,68639607^\circ = 12^\circ 41' 11,0''.$$

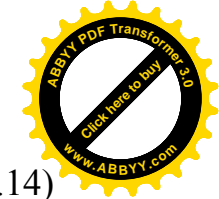
Геомагнітна широта точки спостереження знаходиться за формулою:

$$\varphi_M = 90^\circ - P', \quad (1.13)$$

і в нашому випадку геомагнітна широта лабораторії міста Рівне буде:

$$\varphi_{M.p.} = 90^\circ - 46^\circ 51' 31,3'' = 43^\circ 08' 28,7''.$$

Різниця широт географічної і геомагнітної точки спостереження буде



$$\Delta\varphi = \varphi_{\text{геогр.}} - \varphi_{\text{магн.}} \quad (1.14)$$

І в нашому випадку:

$$\Delta\varphi = 50^\circ 45,5' - 43^\circ 08' 28,7'' = 7^\circ 46' 31,3''.$$

Таким чином, на основі проведених теоретичних і практичних досліджень, нами:

1. Встановлена різниця довгот між положенням магнітного полюса Землі і лабораторії м. Рівне $\Delta\lambda = 126^\circ 30,5'$.
2. Виведена формула для розрахунку полярної віддалі P' будь-якої точки спостереження на земній кулі.
3. Отримана формула для визначення постійної складової схилення магнітної стрілки δ для будь-якої точки спостереження на Землі і встановлено, що для нашої лабораторії $\delta = 12^\circ 41' 11,0''$.
4. Виведена формула контрольного розрахунку δ .
5. Приведена формула розрахунку кута λ' між напрямком меридіану, що проходить через магнітний і географічний полюси Землі і меридіаном будь-якої точки Землі.
6. Встановлена геомагнітна широта лабораторії $\varphi_M = 43^\circ 08' 28,7''$ і різниця широт географічної геомагнітної $\Delta\varphi = 7^\circ 46' 31,3''$.

2. ВИЗНАЧЕННЯ АЗИМУТА І ВІДДАЛІ МІЖ ДВОМА СТАНЦІЯМИ СПОСТЕРЕЖЕНЬ.

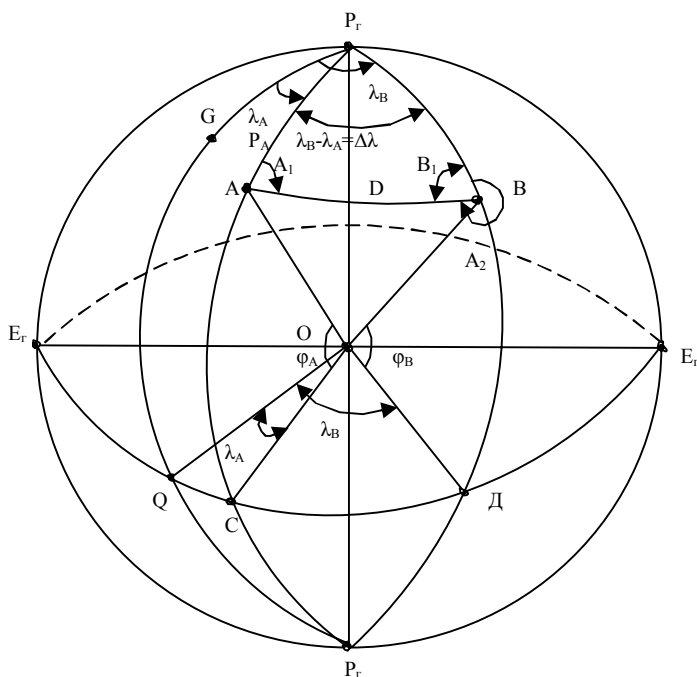


Рис.3. Координати станцій А і В на земній кулі.

Спостереження елементів земного магнетизму проведено в точці А, положення якої на земній кулі у сферичних координатах однозначно задається географічною довготою λ_A і географічною широтою φ_A (див. рис.1). положення точки В на земній кулі визначається довготою λ_B , де λ – це двограний кут між площиною початкового Гринвіцького меридіану і меридіану точки спостереження (у нас $P_r G Q P_r$ – початковий меридіан, $P_r A C P_r$ – меридіан точки А, $P_r B D P_r$ – меридіан точки В). На рис.1 $E_r Q C D E_r$ – географічний екватор.

Визначення віддалі і азимута між двома точками, заданими координатами, називається оберненою геодезичною задачею. Розробимо методику рішення головної оберненої геодезичної задачі.

Розглянемо сферичний трикутник $P_r A B$. Відомими елементами буде різниця довгот

$$\Delta\lambda = \lambda_B - \lambda_A \quad (2.1)$$

і полярні віддалі

$$P_A = 90^\circ - \varphi_A, \quad (2.2)$$

$$P_B = 90^\circ - \varphi_B. \quad (2.3)$$

Необхідно визначити географічний азимут A_1 (кут між напрямком географічного меридіану точки спостереження А до напрямку АВ, в якому знаходиться станція спостереження В), а також віддаль $AB = D$.

Скориставшись формулою косинуса сторони сферичного трикутника, запишемо

$$\cos D = \cos P_A \cos P_B + \sin P_A \sin P_B \cos \Delta\lambda \quad (2.4)$$

Координати станції спостереження в точці А (Рівне)

$$\varphi_A = 50^\circ 35'; \quad \lambda_A = 26^\circ 07,5'$$

Координати станції спостереження в точці В (Київ)

$$\varphi_B = 50^\circ 27'; \quad \lambda_B = 30^\circ 30,0'$$

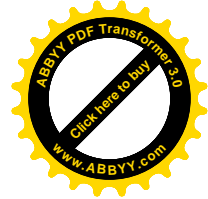
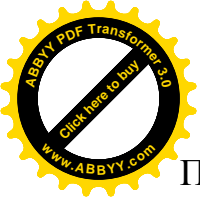
Різниця довгот при цьому буде

$$\Delta\lambda = 30^\circ 30,0' - 26^\circ 07,5' = 4^\circ 22,5',$$

а полярні віддалі

$$P_A = 90^\circ - 50^\circ 35' = 39^\circ 25',$$

$$P_B = 90^\circ - 50^\circ 27' = 39^\circ 33'.$$



Приведемо формулу (4) до робочого вигляду
 $D = \arccos[\cos P_A \cos P_B + \sin P_A \sin P_B \cos \Delta \lambda].$ (2.5)

У загальному вигляді формула розрахунку віддалі на поверхні земної кулі буде:

$D = K \arccos[\cos P_A \cos P_B + \sin P_A \sin P_B \cos \Delta \lambda].$ (2.6)

Астрономи виражають D в годинах. При цьому $K=15$. геодезисти і геофізики виражають D в кілометрах. Тоді $K=111,13$ км. В математиці при рішенні задач сферичної тригонометрії віддаль D визначається в кутовій мірі і $K=1$.

В нашому випадку:

$D = 111,13 \arccos[\cos P_A \cos P_B + \sin P_A \sin P_B \cos \Delta \lambda].$ (2.7)

Тоді

$D = 111,13 \arccos[\cos 39^\circ 25' \cos 39^\circ 33' + \sin 39^\circ 25' \sin 39^\circ 33' \cos 4^\circ 22,5'] = 309,4579292$

км. = 309457,9292 м.

При безпосередньому представленні широт (без попереднього розрахунку полюсних віддалей) формули (5,6 і 7) будуть:

$D = \arccos[\sin \varphi_A \sin \varphi_B + \cos \varphi_A \cos \varphi_B \cos \Delta \lambda].$ (2.8)

$D = K \arccos[\sin \varphi_A \sin \varphi_B + \cos \varphi_A \cos \varphi_B \cos \Delta \lambda].$ (2.9)

$D = 111,13 \text{ км.} \arccos[\sin \varphi_A \sin \varphi_B + \cos \varphi_A \cos \varphi_B \cos \Delta \lambda].$ (2.10)

На основі теореми синусів запишемо

$$\frac{\sin A_1}{\sin P_B} = \frac{\sin \Delta \lambda}{\sin D},$$

або

$$\sin A_1 = \frac{\sin P_B \sin \Delta \lambda}{\sin D}. \quad (2.11)$$

Таким чином, азимут A_1 можна розрахувати за формулою:

$$A_1' = \arcsin\left[\frac{\sin P_B \sin \Delta \lambda}{\sin D}\right], \quad (2.12)$$

де віддаль D необхідно виразити в кутовій мірі, тобто

$$D^\circ = \frac{D_{\text{км}}}{111,13}. \quad (2.13)$$

В нашому випадку

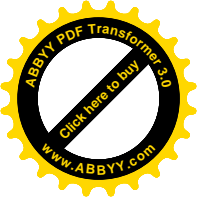
$$D^\circ = \frac{309,4579292_{\text{км}}}{111,13_{\text{км}}} = 2,784647973^\circ = 2^\circ 47'$$

Тоді

$$A_1' = \arcsin\left[\frac{\sin 39^\circ 33' \sin 4^\circ 22,5'}{\sin 2,784647973^\circ}\right] = 88,94593678^\circ = 88^\circ 56' 454''.$$

При представленні полярної віддалі P_B через широту, формула (12) набуде вигляду

$$A_1' = \arcsin\left[\frac{\cos \varphi_B \sin \Delta \lambda}{\sin D}\right]. \quad (2.14)$$



Необхідно відмітити, що по формулам (12) і (14) визначають лише румб азимута, тобто горизонтальний кут між найближчим кінцем меридіана (південним або



північним) до напрямку на дану точку. Румб виражається в межах від 0° до 90° (тобто є гострим кутом). Формули переходу від румбів до азимутів будуть

$$A_1=r_1, \quad (2.15)$$

$$A_2=180^\circ - r_2, \quad (2.16)$$

$$A_3=r_3+180^\circ, \quad (2.17)$$

$$A_4=360^\circ - r_4. \quad (2.18)$$

Рис.4 Румб і азимут

У формулах (2.15)-(2.18) індексами 1,2,3,4 позначені чверті у яких знаходиться сторона D (віддаль між точками A і B).

Величина румба характеризується не лише величиною, але і назвою. Так, румб r_1 у першій чверті має назву „північний схід” і позначається Пн.Сх.; румб у другій чверті має назву „південний схід” і позначається Пд.Сх.; румб у третій чверті має назву „південний захід” і позначається Пд.Зх.; румб у четвертій чверті має назву „північний захід” і позначається Пн.Зх..

При розрахунку по формулах (2.15)-(2.18) слід брати розрахований румб по модулю (абсолютній величині) і підставляти у формули (2.15)-(2.18).



Формули переходу від азимутів до румбів мають вигляд:

$$r_1=A_1; \text{ Пн.Сх.} \quad (2.19)$$

$$A_2 \quad r_2=180^\circ -A_2; \text{ Пд.Сх.} \quad (2.20)$$

$$r_3=A_3-180^\circ; \text{ Пд.Зх.} \quad (2.21)$$

$$r_4=360^\circ - A_4; \text{ Пн.Зх.} \quad (2.22)$$

Приведемо ще одну формулу для визначення азимута

$$A_1' = \arctg \left[\frac{\sin \Delta \lambda}{\cos \varphi_A \operatorname{tg} \varphi_B - \sin \varphi_A \cos \Delta \lambda} \right]. \quad (2.23)$$

І в нашому випадку

$$A_1' = \arctg \left[\frac{\sin 4^\circ 22,5'}{\cos 50^\circ 35' \operatorname{tg} 50^\circ 27' - \sin 50^\circ 35' \cos 4^\circ 22,5'} \right] =$$

$$= -88,94593669^\circ = -88^\circ 56' 45,5''.$$

Тобто, розрахунки за формулами (2.11) і (2.23) дають

однакові результати, що служить внутрішнім контролем розрахунків. Проаналізуємо результати.

Спочатку розрахуємо різницю широт точок A і B

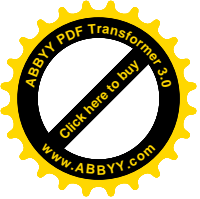
$$\Delta \varphi_{B-A} = \varphi_B - \varphi_A, \quad (2.24)$$

в нашому випадку

$$\Delta \varphi_{B-A} = 50^\circ 27' - 50^\circ 35' = -0^\circ 08'.$$

Тобто, румб визначаємого напрямку має назву „Південний Схід”.

Тому азимут напрямку Рівне-Київ буде:



$$A_1 = 180^\circ - 88^\circ 56' 45,4'' = 91^\circ 03' 14,6''.$$

Знайдемо кут В. За теоремою синусів

$$\frac{\sin B}{\sin P_A} = \frac{\sin A_1}{\sin P_B},$$

звідки

$$\sin B = \frac{\sin P_A \sin A_1}{\sin P_B}, \quad (2.25)$$

$$B = \arcsin \left[\frac{\sin P_A \sin A_1}{\sin P_B} \right], \quad (2.26)$$

або

$$B = \arcsin \left[\frac{\cos \varphi_A \sin A_1}{\cos \varphi_B} \right]. \quad (2.27)$$

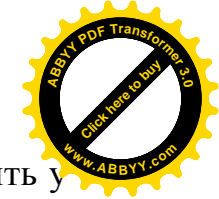
В нашому випадку

$$B = \arcsin \left[\frac{\cos 50^\circ 35' \sin 91^\circ 03' 14,6''}{\cos 50^\circ 27'} \right] = 85,56860597^\circ = 85^\circ 34' 06,98''.$$

Розрахуємо обернений ромб A_2'

$$A_2' = \arctg \left[\frac{\sin \Delta \lambda}{-\cos \varphi_B \operatorname{tg} \varphi_A + \sin \varphi_B \cos \Delta \lambda} \right]. \quad (2.28)$$

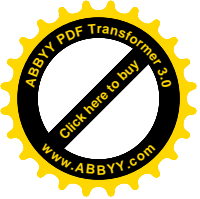
$$A_2' = \arctg \left[\frac{\sin 4^\circ 22,5'}{-\cos 50^\circ 27' \operatorname{tg} 50^\circ 35' + \sin 50^\circ 27' \cos 4^\circ 22,5'} \right] = -85,56860413^\circ = -85^\circ 34' 06,97''.$$



Приймаючи до уваги, що обернений румб лежить у четвертій четверті і назва румбу „Північний Захід”, то

$$A_2 = A_2' + 360^\circ = 360^\circ - 85^\circ 34' 06,97'' = 274^\circ 25' 53,03''.$$

Як бачимо, $A_2' = B$, що являється внутрішнім контуром обчислень.



3. ВИЗНАЧЕННЯ КООРДИНАТ СТАНЦІЇ СПОСТЕРЕЖЕННЯ

За відомими координатами пункту А (φ_A, λ_A), довжині сторони сферичного трикутника D і азимуту A_1 необхідно визначити координати φ_B, λ_B станції спостереження. Яка знаходиться в точці В земної кулі, тобто розв'язати пряму головну геодезичну задачу на поверхні Землі (див. рис.1). Розраховується сферична віддаль D° у кутовій мірі [36,-с.33]

$$D^\circ = \frac{D}{K}, \quad (3.1)$$

$$\tau = \text{ctg} D^\circ \cos \varphi_A - \sin \varphi_A \cos A_1, \quad (3.2)$$

$$q = \text{ctg} D^\circ \sin \varphi_A + \cos \varphi_A \cos A_1. \quad (3.3)$$

$$\Delta \lambda = \text{arctg} \left[\frac{\sin A_1}{\tau} \right], \quad (3.4)$$

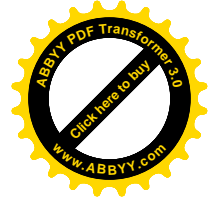
$$\lambda_B = \lambda_A + \Delta \lambda, \quad (3.5)$$

$$\varphi_2 = \text{arctg} = \left[\frac{q}{\sin A_1 \sin \Delta \lambda + p \cos \Delta \lambda} \right], \quad (3.6)$$

$$A_2 = \text{arctg} \left[\frac{\sin \Delta \lambda}{\sin \varphi_B \cos \Delta \lambda - \text{tg} \varphi_A \cos \varphi_B} \right]. \quad (3.7)$$

І в нашому випадку

$$D^\circ = \frac{309,4579292}{111,13} = 2,784647973^\circ = 2^\circ 47' 04,733''$$



$$\tau = \text{ctg} 2,784647973^\circ \cos 50^\circ 35' - \sin 50^\circ 35' - \sin 50^\circ 35' \cos 91^\circ 03' 14,6'' = 20,55938804 * 0,634955265 - 0,772548905(0,018395702) = 13,06850326,$$

$$q = \text{ctg} 2,784647973^\circ \sin 50^\circ 35' + \cos 50^\circ 35' \cos 91,03' 14,6'' = 20,55938804 * 0,772548905 + 0,634955265 * (-0,018395702) = 15,7145227,$$

$$\Delta \lambda = \text{arctg} \left[\frac{\sin 91^\circ 03' 14,6''}{13,06850326} \right] =$$

$$= 4,375000118^\circ = 4^\circ 22' 50,07'',$$

$$\lambda_B = 26^\circ 07' 30'' + 4^\circ 22' 30,00'' = 30^\circ 30' 00'',$$

$$\varphi_B = \text{arctg} \frac{15,87145272}{\sin 91^\circ 03' 14,6'' \sin 4^\circ 22,5' + 13,06850326 \cos 4^\circ 22,5'} = 50,45000051^\circ = 50^\circ 27' 00,00''.$$

Контроль розрахунку широти φ_2 виконаємо за формулою

$$\cos P_B = \cos P_A \cos D + \sin P_A \sin D \cos A_1, \quad (3.8)$$

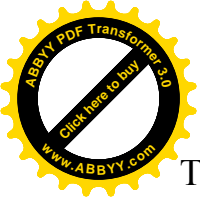
$$\sin \varphi_B = \sin \varphi_A \cos D + \cos \varphi_A \sin D \cos A_1, \quad (3.9)$$

і

$$\varphi_B = \arcsin[\sin \varphi_A \cos D + \cos \varphi_A \sin D \cos A_1]. \quad (3.10)$$

В нашому випадку

$$\varphi_B = \arcsin \left[\sin 50^\circ 35' \cos 2,784647973^\circ + \cos 50^\circ 35' * \sin 2,784647973^\circ \cos 91^\circ 03' 14,6'' \right] = 50,45000038^\circ = 50^\circ 27' 00,00''.$$



Таким чином, розрахунки за формулами (3.6) і (3.10) приводять до однакових результатів, що і буде внутрішнім контролем розрахунків. Зовнішнім контролем вірності теоретичних викладок буде порівняння широти і довготи з відомою: $\varphi_B = 50^\circ 27' 00,00''$ і $\lambda_B = 30^\circ 30' 00''$.

Обернений азимут розраховується за формулою (3.8)

$$A_2' = \arctg \left[\frac{\sin 4,375000178^\circ}{\sin 50^\circ 27' \cos 4,375000178^\circ - \operatorname{tg} 50^\circ 35' \cos 50^\circ 27'} \right] = -85,56860417^\circ = -85^\circ 34' 06,98'',$$

Переходячи від румба A_2' до азимута, отримаємо

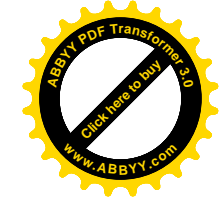
$$A_2 = 360^\circ - A_2' = 274^\circ 25' 53,02''.$$

Контрольне значення оберненого азимута

$$A_2 = 274^\circ 25' 53,02''.$$

Нам невідома література в якій встановлювався δ функціональний зв'язок між географічною і геомагнітною системами координат.

В даній роботі ця проблема вирішена не лише в теоретичному аспекті, але розроблена методично і ілюстроване практично. Вона готова для практичного використання і може бути корисною для студентів і аспірантів відповідного профілю. Геофізики і геодезисти можуть використовувати її в своїй практичній діяльності.



4. ВСТАНОВЛЕННЯ ЗАЛЕЖНОСТІ МІЖ КУТОМ НАХИЛУ МАГНІТНОЇ СТРІЛКИ І ГЕОМАГНІТНОЮ ШИРОТОЮ ПУНКТУ СПОСТЕРЕЖЕНЬ.

Існує функціональна залежність між кутом нахилу магнітної стрілки ν і співвідношення складових індукцій в пункті спостережень

$$\operatorname{tg} \nu = \frac{B_z}{B_h}, \quad (4.1)$$

де B_z – вертикальна складова індукції геомагнітного поля в пункті спостережень;

B_H – горизонтальна складова індукції.

Представимо формулу (4.1) у вигляді

$$\nu = \arctg \left[\frac{B_z}{B_H} \right]. \quad (4.2)$$

З другої сторони, існує залежність φ_{mag} і співвідношенням складових індукції в пункті спостережень

$$\operatorname{tg} \varphi_m = \frac{B_z}{2 B_H}. \quad (4.3)$$

Представимо формулу (4.3) у вигляді

$$\varphi_M = \arctg \left[\frac{B_Z}{2B_H} \right]. \quad (4.4)$$

Подамо формулу (4.3) у вигляді

$$2 \operatorname{tg} \varphi_M = \frac{B_Z}{B_H}. \quad (4.5)$$

Аналізуючи формули (4.1) і (4.5) помітимо, що праві частини даних формул однакові, що дає нам право прирівняти ліві частини.

$$\operatorname{tg} \nu = 2 \operatorname{tg} \varphi_M. \quad (4.6)$$

Тоді, отримаємо

$$\nu = \operatorname{arctg}[2 \operatorname{tg} \varphi_M] \quad (4.7)$$

і

$$\operatorname{tg} \varphi_M = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \nu, \quad (4.8)$$

або

$$\varphi_M = \operatorname{arctg}[0,5 \operatorname{tg} \nu] \quad (4.9)$$

Формули (4.7) і (4.8) встановлюють функціональну залежність між кутом нахилу магнітної стрічки ν на пункті спостережень і геомагнітною широтою $\varphi_{\text{маг}}$ даного пункту.

Так, наприклад, при магнітній широті пункту спостережень $\varphi_M = 43^\circ 08,5'$, магнітна стрілка повинна нахилитися на кут

$$\nu = \operatorname{arctg}[2 \operatorname{tg} 43^\circ 08,5'] = 61,9185885^\circ = 61^\circ 55' 06,92''$$

Кут нахилу магнітної стрілки визначають за допомогою приладу, який називається інклінометром. Інклінометр являє собою магнітну стрілку, що вільно обертається навколо горизонтальної осі.

Нам невідома література в якій встановлювались би функціональна залежність між кутом нахилу

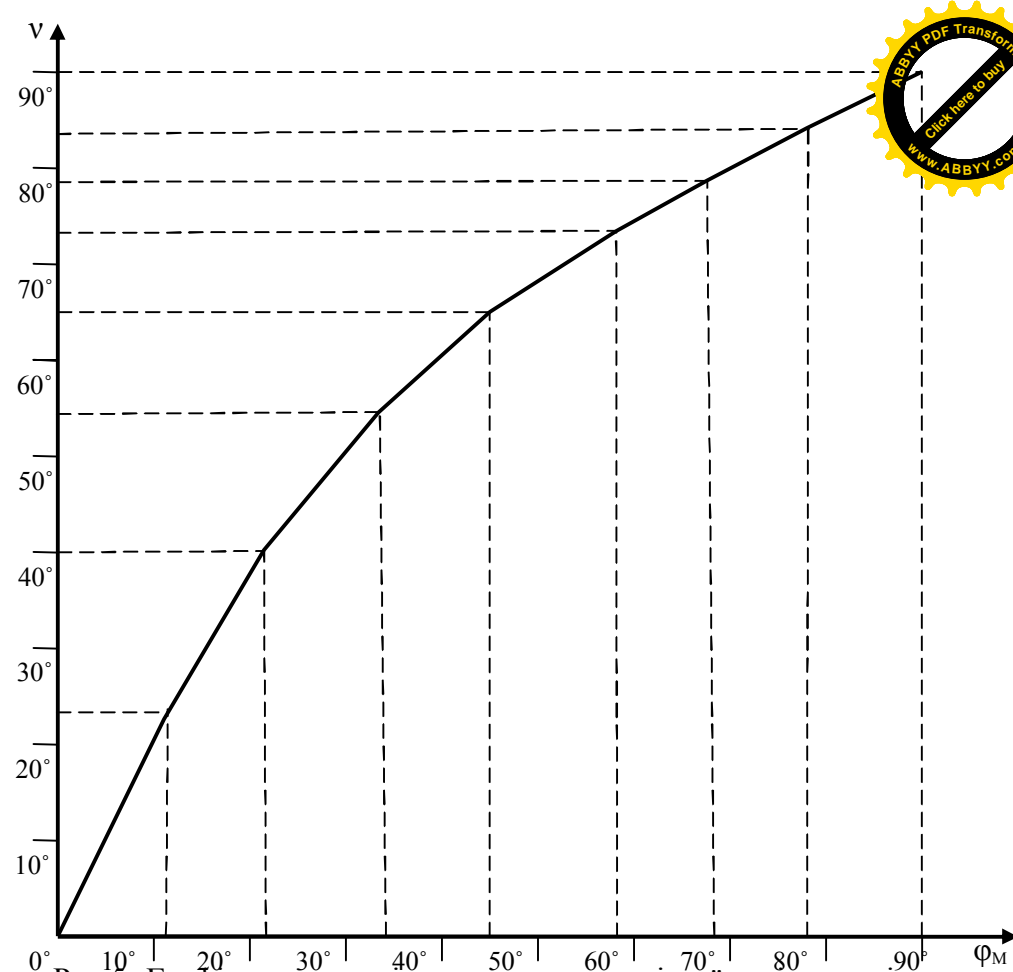


Рис.5. Графік залежності кута нахилу магнітної стрілки ν від геомагнітної широти пункту спостережень $\varphi_{\text{маг}}$.

магнітної стрілки і геомагнітною широтою пункту спостережень.

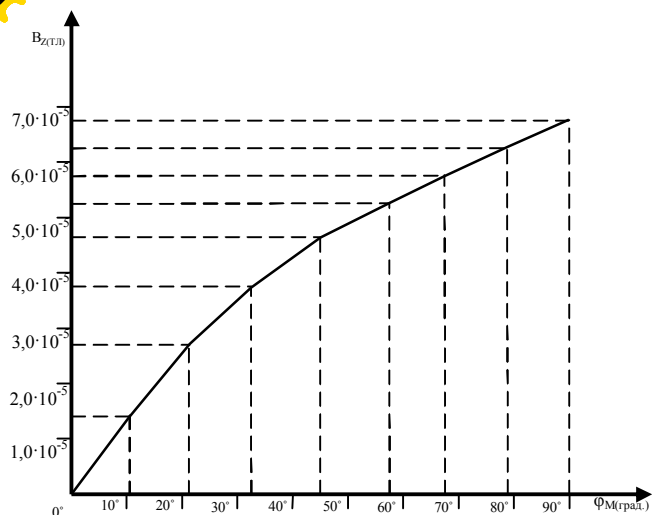


Рис.6. Графік залежності вертикальної складової B_z індукції магнітного поля Землі від геомагнітної широти Φ_M .

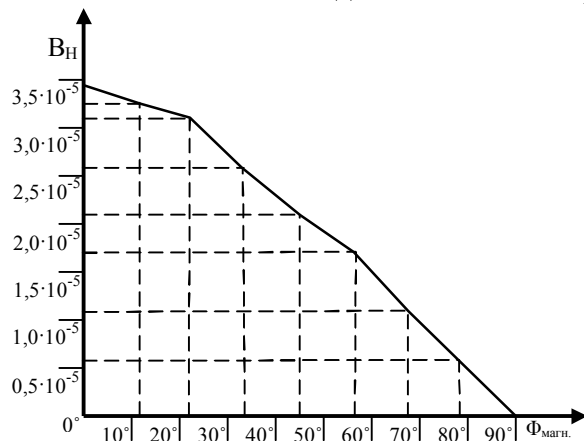


Рис.7. Графік залежності горизонтальної складової B_n індукції магнітного поля Землі від геомагнітної широти Φ_M .

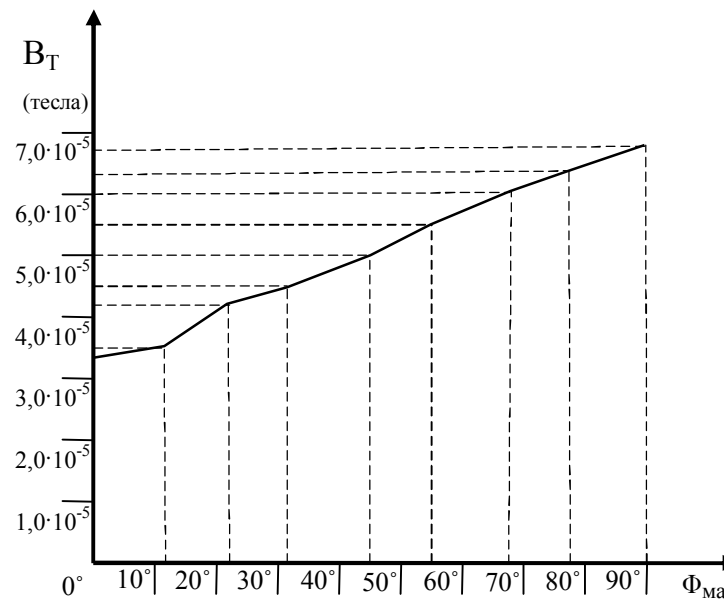
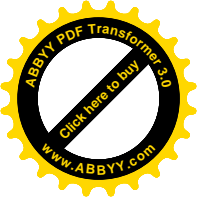


Рис.8. Графік залежності індукції B_t магнітного поля Землі від геомагнітної широти Φ_{Mag} .



5. АПРОКСИМАЦІЯ ЗАЛЕЖНОСТІ ВЕРТИКАЛЬНОЇ СКЛАДОВОЇ B_z ІНДУКЦІЇ МАГНІТНОГО ПОЛЯ ЗЕМЛІ ВІД ГЕОМАГНІТНОЇ ШИРОТИ

Для виводу формули залежності вертикальної складової магнітного поля Землі від геомагнітної широти скористаємося методикою, розробленою у [17].

Побудувавши графік, приходимо до висновку, що емпіричну функцію слід шукати у вигляді

$$B_z = a + b\varphi + c\varphi^2, \quad (5.1)$$

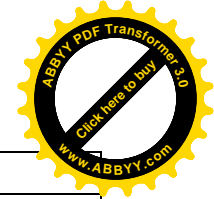
де a , b і c невідомі коефіцієнти, які необхідно визначити і φ значення магнітної широти, на якій визначають B_z , виражена в градусах і долях градуса. В загальному вигляді:

$$y' = a + bx + cx^2. \quad (5.2)$$

Приведемо зведену таблицю апроксимації.

Таблиця 1.

№ п/п	$\varphi_{\text{маг}}=x$ (градуси)	$B_z(\text{тесла})=y$	Проц. $5x^2$ $y' = a + bx + cx^2$	$V_i=y-y'$	V_i^2
1	0,00	0	$0,055 \cdot 10^{-5}$	-0,055	0,003025
2	11,248	$1,346 \cdot 10^{-5}$	1,383	-0,037	0,001369
3	22,4955	$2,686 \cdot 10^{-5}$	2,563	+0,123	0,015129
4	33,7527	$3,662 \cdot 10^{-5}$	3,594	+0,068	0,004624
5	45,000	$4,484 \cdot 10^{-5}$	4,476	+0,008	0,000064
6	56,2536	$5,158 \cdot 10^{-5}$	5,195	-0,037	0,001369
7	67,5046	$5,694 \cdot 10^{-5}$	5,794	-0,100	0,01
8	78,7525	$6,075 \cdot 10^{-5}$	6,230	-0,055	0,003025



9	90	$6,617 \cdot 10^{-5}$	6,517	+0,100	0,01
			$\Sigma = 35,807$	+0,015	$\Sigma = 0,048605$

Середнє значення $B_z = [35,807/9] \cdot 10^{-5} = [3,9785] \cdot 10^{-5}$ тл.

Апроксимацію проведемо по способу найменших квадратів, вимагаючи мінімального відхилення квадратів V_i^2 розходжень результатів, розрахованих за отриманою формулою y' і значеннями y_i , при введеним у таблиці.

При цьому нам необхідно рішити систему нормальних рівнянь:

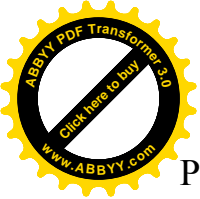
$$\begin{aligned} an + b \sum_{i=1}^n X_i + c \sum_{i=1}^n X_i^2 &= \sum_{i=1}^n Y_i, \\ a \sum_{i=1}^n X_i + b \sum_{i=1}^n X_i^2 + c \sum_{i=1}^n X_i^3 &= \sum_{i=1}^n X_i Y_i, \\ a \sum_{i=1}^n X_i^2 + b \sum_{i=1}^n X_i^3 + c \sum_{i=1}^n X_i^4 &= \sum_{i=1}^n X_i^2 Y_i. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Розв'язавши дану систему нормальних рівнянь,, були отримані наступні значення шуканих коефіцієнтів a , b і c

$a=0,054983643$; $b=0,124694863$; $c=-0,000587725$.

Таким чином, нами отримана форма розрахунку вертикальної складової індукції геомагнітного поля Землі від геомагнітної широти

$$B_z = [0,05498 + 0,12469 \varphi_m - 0,00059 \varphi_m^2] \cdot 10^{-5} \text{ тл.} \quad (5.4)$$



Результати апроксимації приведені в таблиці 1 виразом $y' = a + bx + cx^2$. При цьому в розрахунках були взяті всі знаки у коефіцієнтах a, b і c.

Приведемо оцінку точності розрахунків по виведеній нами формулі (.4).

Середня квадратна похибка розрахунку B_z за формулою (.4) буде

$$m_{B_z} = \sqrt{\frac{\sum V_i^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{0,048605}{8}} \cdot 10^{-5} = 0,078 \cdot 10^{-5} = 7,8 \cdot 10^{-7} \text{ месла}$$

Гранична похибка складає

$$\Delta_{cp.} = 3m_{B_z} = 2,34 \cdot 10^{-6} \text{ Тл.}$$

Відносна похибка розрахунків за формулою (.4) буде

$$\Delta_{відн} = m_{B_z} / B_{zcp.} = 7,8 \cdot 10^{-7} / 3,9785 \cdot 10^{-5} = 0,0196 = \frac{1}{50}.$$

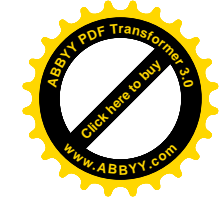
Або в процентах

$$\Delta\% = \Delta_{відн} \cdot 100\% = 2\%.$$

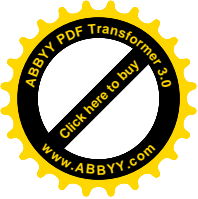
Апроксимація виконана за програмою [5x²] програмованого мікрокалькулятора CITIZEN SRP-350.

Інструкція

1. Натиснувши клавішу made, входимо в меню програм.
2. Вибираємо програму 1STAT, підводячи курсор.
3. Натискаємо клавішу Enter, входячи в підменю програм.
4. Вибираємо програму 2 reg і натискаємо клавішу Enter.



5. Підводимо курсор під програму [5x²].
6. Натискаємо клавішу Enter.
7. Натискаємо клавішу data, і із трьох опцій меню вибираємо DATA-INPUT.
8. Натискаємо клавішу Enter.
9. Попарно набираємо параметри $X_i \downarrow Y_i$, натискаючи курсор \downarrow (сторінку вниз) для набору нового параметра.
10. Набравши всі параметри, натискаємо клавішу 2nd і потім клавішу statvar.
11. Програма виконується автоматично і через декілька секунд будуть готові результати.
12. Підводячи курсор під знак Y, натискаємо Enter і набираємо факторні дані X_i і зчитуємо розрахункові дані для контролю Y_i .



6. АПРКСИМАЦІЯ ЗАЛЕЖНОСТІ ГОРИЗОНТАЛЬНОЇ СКЛАДОВОЇ ІНДУКЦІЇ МАГНІТНОГО ПОЛЯ ЗЕМЛІ ВІД ГЕОМАГНІТНОЇ ШИРОТИ.

По тій же методиці апроксимуємо залежність горизонтальної складової індукції магнітного поля Землі від геомагнітної широти.

Таблиця 2.

№ п/п	$\varphi_M = X$ градуси	$y = B_{H(Tл)}$	$y' = a + bx + cx^2$	$V = y - y'$	V^2
1	0	$3,409 \cdot 10^{-5}$	$3,536 \cdot 10^{-5}$	-0,127	0,016129
2	11,25	3,384	3,331	+0,053	0,002809
3	22,5	3,243	3,056	+0,187	0,034969
4	33,75	2,740	2,711	+0,029	0,000841
5	45	2,242	2,295	-0,053	0,0002809
6	56,25	1,723	1,808	-0,085	0,007225
7	67,5	1,179	1,250	-0,071	0,005041
8	78,75	0,614	0,622	-0,008	0,000064
9	90	0	-0,076	+0,076	0,005776
	Σ	$18,534 \cdot 10^{-5}$		$\Sigma 0,001$	$\Sigma 0,075663$

В результаті розрахунків отримані значення коефіцієнтів

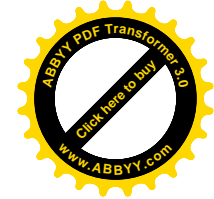
$a=3,535612121$; $b=-0,015008119$; $c=-0,000279186$.

і формула має вигляд

$$B_H' = 3,535612121 - 0,015008119 \varphi_M - 0,000279186 \varphi_M^2. \quad (6.1)$$

Середня квадратна похибка розрахунку за формулою буде:

$$m_{B_H} = \sqrt{\frac{\Sigma V^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{0,075663}{8}} \cdot 10^{-5} = 0,097 \cdot 10^{-5} Tл = 9,7 \cdot 10^{-7} Tл$$



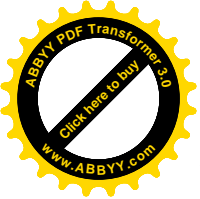
Гранична похибка

$$\Delta_{гр.} = 3m_{B_H} = 2,91 \cdot 10^{-6} Tл.$$

Відносна похибка

$$\Delta_{відн.} = \frac{m_{B_H}}{B_{Hcp}} = \frac{2,91 \cdot 10^{-6}}{18,534 \cdot 10^{-5}} = 1,413 \cdot 10^{-1}$$

$$\Delta_{відн.} \% = \Delta_{відн.} \cdot 100 \% = 14,13 \%$$



7. АПРОКСИМАЦІЯ ЗАЛЕЖНОСТІ ІНДУКЦІЇ ПОЛЯ ОДНОРІДНОГО НАМАГНІЧУВАННЯ ЗЕМНОЇ КУЛІ ВІД ГЕОМАГНІТНОЇ ШИРОТИ

Аналогічно проведена апроксимація і отримана формула для розрахунку індукції B_T магнітного поля Землі від широти.

Таблиця 3

№ п/п	$\varphi_M = X$ градуси	$y = B_{H(Tл)}$	$y' = a + bx + cx^2$ (градуси)	$V = y - y'$	V^2
1	0	$3,409 \cdot 10^{-5}$	$3,342 \cdot 10^{-5}$	$+0,067 \cdot 10^{-5}$	0,004489
2	11,25	3,642	3,759	-0,117	0,013689
3	22,5	4,211	4,175	+0,036	0,001296
4	33,75	4,574	4,588	-0,014	0,00196
5	45	5,013	4,999	+0,014	0,000196
6	56,25	5,438	5,408	+0,030	0,0009
7	67,5	5,815	5,814	+0,001	0,000001
8	78,75	6,206	6,219	-0,013	0,000169
9	90	6,617	6,621	-0,004	0,000016
				$\Sigma 0$	$\Sigma 0,020952$

Встановлені коефіцієнти апроксимуючої функції
 $a=3,341751515$; $b=0,037214276$; $c=-8,62 \cdot 10^{-6}$.

Загальна формула переходу має вигляд

$$B_T = 3,341751515 + 0,037214276 \varphi_M - 8,62 \cdot 10^{-6} \varphi_M^2. \quad (7.1)$$

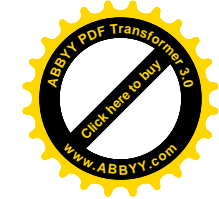
Середня квадратична похибка m_{B_T} розрахунку за формулою

$$m_{B_T} = \sqrt{\frac{\Sigma V^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{0,020959}{8}} = 0,0511 \cdot 10^{-5} Tл = 5,11 \cdot 10^{-7} Tл.$$

Гранична похибка:

$$\Delta_{cp.} = 3m_{B_T} = 3 \cdot 5,11 \cdot 10^{-7} = 1,53 \cdot 10^{-6} Tл.$$

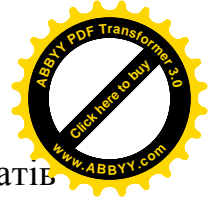
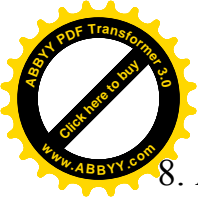
Відносна похибка:



$$\Delta_{відн.} = \frac{m_{B_T}}{B_{Tcp.}} = \frac{1,53 \cdot 10^{-6}}{4,99 \cdot 10^{-5}} = 0,03066 = \frac{1}{32} Tл.$$

Відносна похибка в %:

$$\Delta_{відн.} \% = \Delta_{відн.} \cdot 100\% = 3,06\%.$$



8. АПРОКСИМАЦІЯ ЗАЛЕЖНОСТІ МАГНІТНОГО МОМЕНТУ ЗЕМНОЇ КУЛІ ВІД ШИРОТИ

Побудувавши графік залежності магнітного моменту від широти, приходимо до висновку, що емпіричну функцію слід шукати у вигляді

$$M = \alpha_3 \varphi_m^3 + \alpha_2 \varphi_m^2 + \alpha_1 \varphi_m + \alpha_0. \quad (8.1)$$

При розробці програми на мікроЕОМ прийемо до уваги рівномірне розташування вузлів апроксимації і представимо факторний аргумент у вигляді

$$Z = \varphi - \varphi_C = \varphi - (\varphi_0 - \varphi_n) / 2. \quad (8.2)$$

В даному випадку формула (8.1) буде

$$M(Z) = \alpha_3 Z^3 + \alpha_2 Z^2 + \alpha_1 Z + \alpha_0, \quad (8.3)$$

де $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, – невідомі коефіцієнти, які необхідно визначити по способу найменших квадратів.

Програма розрахована на апроксимацію функції $M(\varphi)$ з довільним числом $m > 3$ рівно відстояних вузлів $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$.

Необхідно рішити систему нормальних рівнянь

$$\begin{bmatrix} m & \sum_{i=1}^m Z_i & \sum_{i=1}^m Z_i^2 & \sum_{i=1}^m Z_i^3 \\ \sum_{i=1}^m Z_i & \sum_{i=1}^m Z_i^2 & \sum_{i=1}^m Z_i^3 & \sum_{i=1}^m Z_i^4 \\ \sum_{i=1}^m Z_i^2 & \sum_{i=1}^m Z_i^3 & \sum_{i=1}^m Z_i^4 & \sum_{i=1}^m Z_i^5 \\ \sum_{i=1}^m Z_i^3 & \sum_{i=1}^m Z_i^4 & \sum_{i=1}^m Z_i^5 & \sum_{i=1}^m Z_i^6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m \int_i \\ \sum_{i=1}^m \int_i Z_i \\ \sum_{i=1}^m \int_i Z_i^2 \\ \sum_{i=1}^m \int_i Z_i^3 \end{bmatrix}$$

Приведемо зведену таблицю результатів апроксимації

Таблиця 4

№ п/п	$\varphi_{\text{магн}} = Z$ градуси	$M(Z)(a \cdot M^2)$	$M(Z)_{\text{апрокс.}}$	$V = M - M^?$	V^2
1	0,00	$8,79 \cdot 10^{22}$	$8,803 \cdot 10^{22}$	-0,013	0,000169
2	11,25	$8,90 \cdot 10^{22}$	$8,957 \cdot 10^{22}$	-0,057	0,003249
3	22,50	$9,05 \cdot 10^{22}$	$8,851 \cdot 10^{22}$	+0,199	0,039601
4	33,75	$8,50 \cdot 10^{22}$	$8,588 \cdot 10^{22}$	-0,088	0,007744
5	45,00	$8,17 \cdot 10^{22}$	$8,274 \cdot 10^{22}$	-0,094	0,008836
6	56,25	$8,00 \cdot 10^{22}$	$8,011 \cdot 10^{22}$	-0,011	0,000121
7	67,50	$7,95 \cdot 10^{22}$	$7,904 \cdot 10^{22}$	+0,046	0,002116
8	78,75	$8,12 \cdot 10^{22}$	$8,057 \cdot 10^{22}$	+0,063	0,003969
9	90,00	$8,53 \cdot 10^{22}$	$8,575 \cdot 10^{22}$	-0,045	0,002025
		$76,02 \cdot 10^{22}$		0	0,06783

Отримана формула має вигляд (8.4)

$$M = 1,2190 \cdot 10^{-5} \varphi_m^3 - 1,4404 \cdot 10^{-3} \varphi_m^2 + 2,8370 \cdot 10^{-2} \varphi_m + 8,8028.$$

Середня квадратична похибка визначення магнітного моменту Землі за формулою буде

$$m_M = \sqrt{\frac{\sum V^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{0,06783}{8}} \cdot 10^{22} = 0,09 \cdot 10^{22} \text{ а.м.}$$

Гранична похибка:

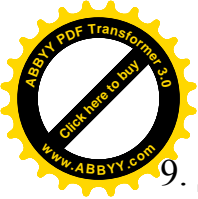
$$\Delta_{gp} = 3m_M = 3 \cdot 0,09 \cdot 10^{22} = 2,7 \cdot 10^{21} \text{ а.м.}$$

Відносна похибка:

$$\Delta_{\text{відн.}} = \frac{m_M}{M_{\text{середн.}}} = \frac{0,09 \cdot 10^{22}}{76,02 \cdot 10^{22}} = 0,011.$$

Відносна похибка у відсотках:

$$\Delta_{\text{відн.}} \% = \Delta_{\text{відн.}} \cdot 100\% = 1,1\%.$$



9. ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАЛЕЖНОСТІ СИЛИ СТРУМУ ТАНГЕНЦІОНАЛЬНОГО ГАЛЬВАНОМЕТРА ВІД ШИРОТИ ПУНКТУ СПОСТЕРЕЖЕННЯ

Дослідимо залежність сили струму тангенціального гальванометра від широти пункту спостереження при визначенні горизонтальної складової геомагнітного поля Землі.

Раніше нами була отримана формула на основі закону Біо-Савара-Лапласа

$$B_{\Gamma} = \frac{\mu_0 IN}{2Rtg\alpha} \quad (9.1)$$

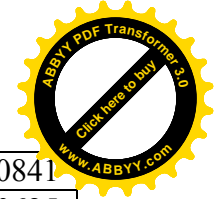
Знайдемо величини силу струму I:

$$I = \frac{2B_{\Gamma} Rtg\alpha}{\mu_0 N} \quad (9.2)$$

За формулою (9.2) розрахуємо значення I для горизонтальної складової B_{Γ} на різних широтах земної кулі для нормального магнітного поля Землі. В подальшому виразимо силу струму як функцію геомагнітної широти. Для цього нам необхідно підібрати апроксимуючу функцію в залежності від графіка цієї залежності.

Таблиця 5.

№ п/п	φ_m градуси	B_H (Тл)	I (а)	$I = a + b\varphi_{(a)} + c\varphi^2$	$V = I - I'$	V^2
1	0	$3,409 \cdot 10^{-5}$	1,158	1,201	-0,043	0,001849
2	11,25	3,384	1,149	1,132	+0,017	0,000289
3	22,5	3,243	1,102	1,038	+0,064	0,004096
4	33,75	2,740	0,931	0,921	+0,01	0,0001
5	45	2,242	0,762	0,780	-0,018	0,000324



6	56,25	1,723	0,585	0,614	-0,029	0,000841
7	67,5	1,179	0,400	0,425	-0,025	0,000625
8	78,75	0,614	0,208	0,211	-0,003	$9 \cdot 10^{-6}$
9	90	$1 \cdot 10^{-9}$	0	-0,026	+0,026	0,000676
					$\Sigma -0,001$	$\Sigma 0,008809$

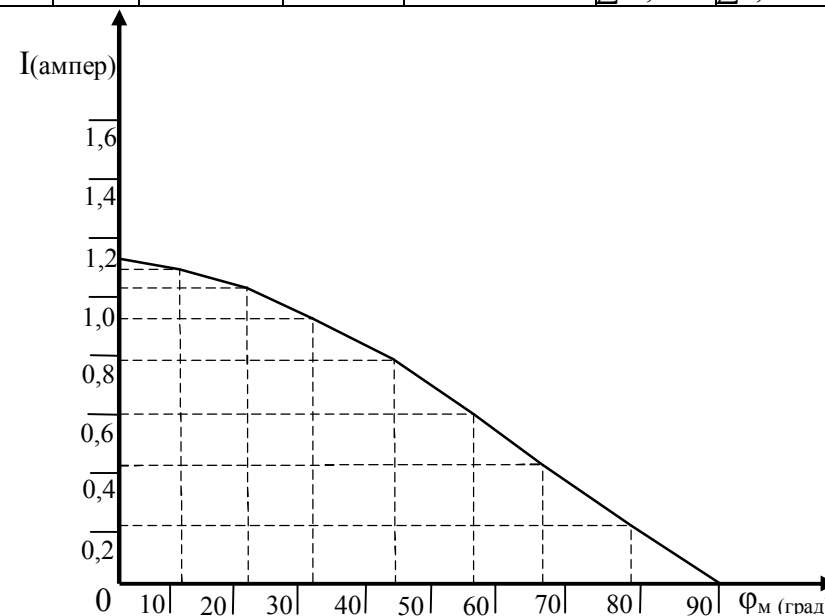
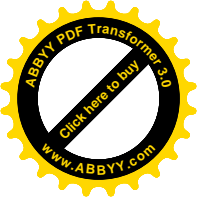


Рис.9. Графік залежності сили струму при визначенні горизонтальної складової індукції магнітного поля Землі від геомагнітної широти пунктів спостережень $a=1,200939394$; $b=-0,00509062$; $c=-0,00009496$.

Для нашої рамки, яка складається із $N=5$ витків радіуса $R=0,107$ м, приймаючи до уваги, що коефіцієнт магнітної проникливості $\mu_0=1,26 \cdot 10^{-6}$ Гн/м, на кожній широті спостереження будемо добиватися відхилення магнітної стрілки на $\alpha=45^\circ$, регулюючи потенціометром і повзунком реостата. При цьому



$$I = \frac{2 \cdot B_z \cdot 0,107 \operatorname{tg} 45^\circ}{1,26 \cdot 10^{-6} \cdot 5} \left[\frac{\kappa z}{c^2 a} \cdot \frac{c^2 a^2 M}{M \cdot \kappa z} \right], \quad (9.3)$$

або

$$I = 33968,25397 \cdot B_H(a), \quad (9.4)$$

За формулою (3) розрахуємо значення сили струму I в залежності від значення B_H , що відповідає певній геомагнітній широті станції спостереження і впишемо в таблицю 1.

По приведеній вище методиці апроксимуємо залежність сили струму від широти для фіксованого відхилення магнітної стрілки.

Емпіричну формулу будемо шукати у вигляді

$$I' = a + b\varphi_m + c\varphi_m^2. \quad (9.5)$$

В результаті апроксимації отриманні значення коефіцієнтів:

$a=1,200939394$; $b=-0,00509062$; $c=-0,00009496$.

Тобто, шукана формула має вигляд

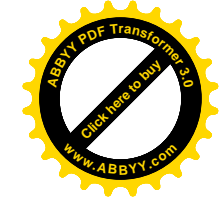
$$I' = 1,200939394 - 0,00509062\varphi_m - 0,00009496\varphi_m^2, \quad (9.6)$$

або для практичного використання

$$I' = 1,2 - 5,1 \cdot 10^{-3} \varphi_m - 1,0 \cdot 10^{-4} \varphi_m^2. \quad (9.7)$$

За формулою (9.6) були розраховані значення сили струму для вузлових значень широт, приведених у таблиці 1.

Середня квадратична похибка розрахунку сили струму для відповідної широти складає



$$m_I = \sqrt{\frac{\sum V^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{0,008809}{8}} = 0,033 \text{ а.м.}$$

Звичайно, щоб використати дану методику для визначення геомагнітної широти за зміною сили струму приладу при фіксованому куту повороту магнітної стрілки, необхідно підвищити чутливість приладу на порядок.

В подальшому зафіксуємо силу струму, наприклад на величині 0,5 ампер і знайдемо кут повороту α стрілки на кожній із широт станцій спостереження.

Представимо формулу (9.2) у вигляді

$$\alpha = \operatorname{arctg} \left[\frac{I\mu_0 N}{2RB_z} \right], \quad (9.8)$$

або

$$\alpha = \operatorname{arctg} \left[\frac{0,5 \cdot 1,26 \cdot 10^{-6} \cdot 5}{2 \cdot 0,107 \cdot B_z} \right] \left[\frac{a \cdot M \cdot \kappa z}{c^2 a^2} \cdot \frac{1}{M} \cdot \frac{c^2 a}{\kappa z} \right]. \quad (9.9)$$

тобто

$$\alpha = \operatorname{arctg} \left[\frac{0,00001472}{B_z} \right] (\text{градуси}). \quad (9.10)$$

За формулою (9.10) розрахуємо значення α для вузлових точок спостереження.

Таблиця 6.

№ п/п	φ_M (градуси)	B_H (Тл)	α (градуси)
1	0	$3,409 \cdot 10^{-5}$	0,432
2	11,25	3,384	0,435
3	22,5	3,243	0,454
4	33,75	2,740	0,537
5	45	2,242	0,656

6	56,25	1,723	0,854
7	67,5	1,179	1,248
8	78,75	0,614	2,397
9	90	$1 \cdot 10^{-9}$	89,996

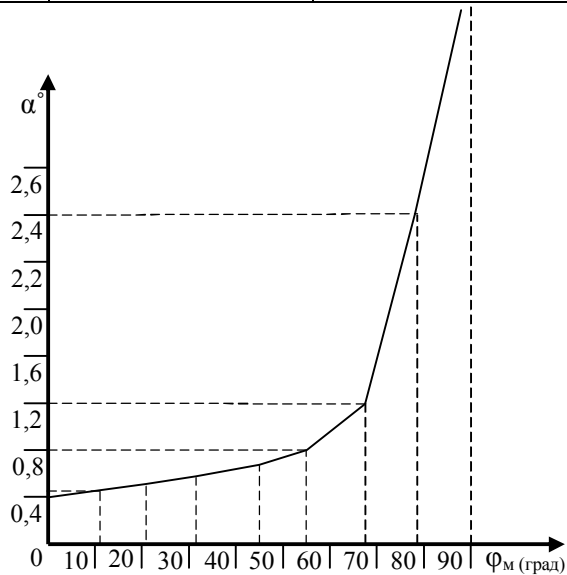


Рис.10. Графік залежності кута повороту α магнітної стрілки при фіксованій силі струму у колі рамки від широти пункту спостереження.

10. ПРЕДСТАВЛЕННЯ ВЕРИКАЛЬНОЇ СКЛАДОВОЇ ІНДУКЦІЇ ГЕОМАГНІТНОГО ПОЛЯ ЗЕМЛІ ЧЕРЕЗ ГОРИЗОНТАЛЬНУ.

Вертикальна складова індукції магнітного поля земної кулі

$$B_z = \mu_0 \frac{M}{2\pi R^3} \sin \varphi_m. \quad (10.1)$$

Горизонтальна складова

$$B_H = \mu_0 \frac{M}{4\pi R^3} \cos \varphi_m, \quad (10.2)$$

де R – радіус земної кулі,
 M – магнітний момент.

З формули (.2) запишемо

$$\mu_0 \frac{M}{2\pi R^3} = 2 B_H. \quad (10.3)$$

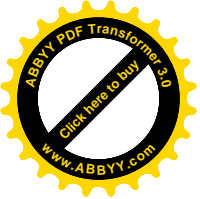
Підставляючи ліву частину виразу (10.3) в (10.1) отримаємо

$$B_z = \frac{2 B_H}{\cos \varphi_m} \sin \varphi_m,$$

або

$$B_z = 2 B_H \operatorname{tg} \varphi_m. \quad (10.4)$$

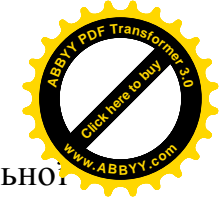
Таким чином, формула функціонального зв'язку між складовими індукції магнітного поля земної кулі вираховується виразом (10.4).



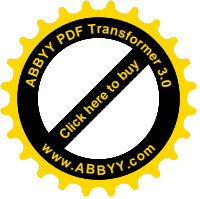
ВИСНОВКИ

На основі проведених в даній роботі теоретичних і практичних досліджень:

1. Встановлена різниця довгот між положенням магнітного полюса Землі і лабораторії м. Рівне $\Delta\lambda = 126^{\circ}30,5'$.
2. Виведена формула для розрахунку полярної віддалі P' будь-якої точки спостереження на земній кулі.
3. Отримана формула для визначення постійної складової схилення магнітної стрілки δ для будь-якої точки спостереження на Землі і встановлено, що для нашої лабораторії $\delta = 12^{\circ}41'11,0''$.
4. Виведена формула контролю розрахунку δ .
5. Приведена формула розрахунку кута λ' між напрямком меридіану, що проходить через магнітний і географічний полюси Землі і меридіаном будь-якої точки Землі.
6. Встановлена магнітна широта лабораторії $\varphi_M = 43^{\circ}08'28,7''$ і різниця широт географічної і геомагнітної $\Delta\varphi = 7^{\circ}46'31,3''$.
7. Отримані формули визначення азимута і віддалі між двома станціями спостережень.
8. Встановлені формули визначення координат станції спостереження.
9. Досліджена залежність між кутом нахилу магнітної стрілки і геомагнітною широтою пункту спостережень.

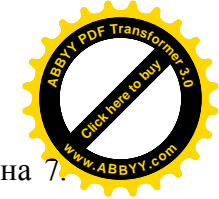


10. Отримана формула залежності вертикальної складової індукції магнітного поля Землі від геомагнітної широти.
11. Проведена апроксимація залежності горизонтальної складової індукції магнітного поля Землі від геомагнітної широти.
12. Апроксимована залежність індукції поля однорідного намагнічування земної кулі від геомагнітної широти.
13. Отримана формула залежності магнітного моменту земної кулі від широти.
14. Досліджена залежність сили струму тангенціального гальванометра від широти пункту спостереження.
15. Представлена вертикальна складова індукції геомагнітного поля Землі через горизонтальну.

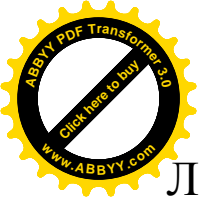


ЛІТЕРАТУРА

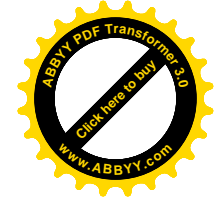
1. Белова Н.А. Курс сферической астрономии. М.: Недра, 1971,-182 с.
2. Біленко І.І. Фізичний словник.-2-е вид., перероб. і доповн.- К.: Вища школа, 1993, – 319 с.
3. Васильєва Л.Д., Медведенко Б.І., Якименко Ю.І. Напівпровідникові прилади: Підручник. – К.:ІВЦ „Видавництво „Політехніка””, 2003, – 388 с.
4. Власов А.Д., Мурин Б.П. Единицы физических величин в науке и технике: Справ очник. – Энергоатомиздат, 1990, – 176 с.
5. Гершунський Б.С. Основы электроники и микроэлектроники: Учебник. – 4-е изд. Перероб. и доп. – К.: Вища школа, 1989, – 423 с.
6. Геодезичний енциклопедичний словник. За ред. В. Латинського. Львів, Євро світ, 2001, – 668 с.
7. Детлар А.Д., Яворський В.И. Курс общей физики. – М.: Наука, 1989, – 608 с.
8. Деденко Л.Г.,Керженцев В.В. Математическая обработка и оформление результатов эксперимента. М.: МГУ, 1977, – 112 с.
9. Зайдель А.И. Ошибки измерений физических величин. Ленинград,: Наука, 1974, – 108 с.
10. Кабардин О.Ф. Фізика. Справ. Материалы. Учебн. пособ. Для учащихся. М.: Просвещение, 1991, – 367 с.
11. Кошкин Н.И., Ширкевич М.Г. Справ очник по элементарной физике. М.: Наука, 1972, – 255 с.
12. Кучерук І.М., Горбачук І.Т., Луцик П.П. Загальний курс фізики. Т.1.–К.: Техніка, 1999, – 536 с.
13. Кучерук І.М., Горбачук І.Т., Луцик П.П. Загальний курс фізики. Т.2.–К.: Техніка, 2001, – 452 с.
14. Кучерук І.М., Горбачук І.Т., Загальний курс фізики. Т.3.– К.: Техніка, 1999, – 520 с.
15. Літнарівч Р.М. Основы математики. Дослідження результатів психолого-педагогічного експерименту



- поліноміальною функцією. Навчальний посібник. Частина 7. МЕНУ, Рівне, 2006, 20 с.
16. Афанасьєва О.М., Бродський Я.С., Павлов О.Л. та інші. Математика. – К.: Вища школа,2002, – 448 с.
 17. Соколенко О.І. Вища математика. Підручник. –К.: „Академія”, 2003, – 432 с.
 18. Пастушенко С.М. Загальна фізика: механіка: навчальний посібник. – К.: Техніка, 1999, – 520 с.
 19. Пастушенко С.М. Формули і закони загальної фізики: навчальний посібник для студентів ВНЗ. 2-е видання:Діал., 2005, – 268 с.
 20. Почтарьов В.Н., Михлик Б.З. Тайна математической Земли. М.: Педагогіка, 1986, – 112 с.
 21. Мудров В.Н, Кушко В.Л. Методы обработки измерений. М.: Сов. радио, 1976, – 192 с.



Літнарівч Руслан Михайлович доцент,
кандидат технічних наук

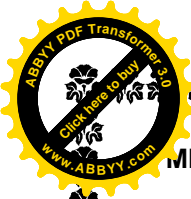


ВСТАНОВЛЕННЯ ЗВ'ЯЗКУ МІЖ ГЕОГРАФІЧНОЮ І ГЕОМАГНІТНОЮ СИСТЕМАМИ КООРДИНАТ

Частина 2

Комп'ютерний набір, верстка, редагування і дизайн у
редакторі Microsoft Office 2003: **Штиба Леонід
Васильович.**

Міжнародний Економіко-гуманітарний університет
імені академіка С. Дем'янчука, 4.



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МІЖНАРОДНИЙ ЕКОНОМІКО-ГУМАНІТАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Ім.акад. С.Дем'янчука

Р.О.Берник

**ПОБУДОВА І ДОСЛІДЖЕННЯ
МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ
ЗАЛЕЖНОСТІ МАГНІТНОГО МОМЕНТУ
ЗЕМЛІ ВІД ШИРОТИ МЕТОДОМ
СТАТИСТИЧНИХ ВИПРОБУВАНЬ МОНТЕ
КАРЛО**

Апроксимація поліномом третього степеня



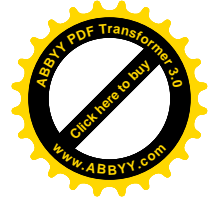
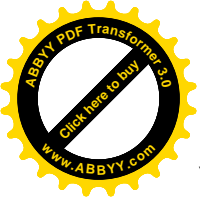
Модель ПГБ10-201

Науковий керівник:
кандидат технічних наук,
доцент Р. М. Літнарівч

Рівне – 2010



Роман Олександрович Берник



УДК 53. 02:550.38

Берник Р.О. Побудова і дослідження математичної моделі залежності магнітного моменту Землі від широти методом статистичних випробувань Монте Карло. Апроксимація поліномом третього степеня. Модель ПГБ10-201.МЕГУ, Рівне, 2010, 62 с.

Рецензент: В. Г.Бурачек, доктор технічних наук, професор

Відповідальний за випуск: Й. В. Джунь, доктор фізико-математичних наук, професор

Книга написана за матеріалами роботи наукової фізико-математичної школи МЕГУ

Встановлюється функціональна залежність магнітного моменту планети Земля від геомагнітної широти. Дається вивід формули у вигляді поліному третього порядку.

Математична модель будується на основі способу найменших квадратів.

Проводиться дослідження точності зрівноважених елементів методом статистичних випробувань Монте Карло.

Для студентів і аспірантів напрямку наук про Землю.

Functional dependence of magnetic moment of planet is set Earth from a geomagnetical breadth. The conclusion of formula is given in a kind to the polynomial of the third order.

A mathematical model is built on the basis of method of leastsquares.

Research of exactness of the balanced elements is conducted by the method of statistical tests of Monte Karlo.

For students and graduate students of direction of sciences about Earth.

ЗМІСТ

Передмова.....	5
Розділ 1. Геомагнітний момент Землі.....	6
1.1. Представлення геомагнітного моменту поля Землі.....	6
1.2. Представлення істинної моделі.....	12
Розділ 2. Побудова спотвореної моделі.....	14
2.1. Генерування істинних похибок для дослідження математичної моделі методом статистичних випробувань Монте Карло.....	14
2.2. Представлення спотвореної моделі.....	16
Розділ 3. Зрівноваження моделі.....	17
3.1. Представлення системи нормальних рівнянь.....	17
3.2. Встановлення коефіцієнтів нормальних рівнянь.....	18
3.3. Рішення нормальних рівнянь способом Крамера	20
Розділ 4. Оцінка точності.....	26
4.1. Контроль зрівноваження	26
4.2. Оцінка точності параметрів, отриманих із системи нормальних рівнянь	26
Висновки.....	32
Літературні джерела	34
Додатки	36

Передмова

Безумовний науковий і практичний інтерес представляє дослідження геомагнітного поля Землі.

Вивченню природи геомагнітного поля і в наш час приділяється велика увага. Вчені намагаються отримати відповіді на запитання: коли і як зародилося магнітне поле земної кулі? Чому воно існує мільярди років? Як це поле буде змінюватись в майбутньому?

В даній роботі ми зробимо спробу виразити один із основних компонентів геомагнітного поля Землі магнітний момент планети графічно і встановити функціональну залежність магнітного моменту від широти.

Нами підбирається емпірична формула у вигляді поліному третього порядку. Математична модель будується на основі способу найменших квадратів. Побудована ймовірніша модель приймається як істинна модель, на основі якої проводяться дослідження точності методом статистичних випробувань Монте Карло. Генеруються псевдо випадкові числа, які приймаються як істинні похибки, якими спотворюється істинна модель.

В подальшому методом найменших квадратів урівноважується спотворена модель і робиться оцінка точності врівноважених елементів. Значення істинних похибок дає можливість зробити порівняльний аналіз. Набирається велика статистика шляхом побудови і дослідження великої кількості моделей.

Розроблена методика дозволить зробити попередній розрахунок точності при проектуванні майбутніх геомагнітних досліджень в будь-якій точці планети Земля.

Розділ 1. Геомагнітний момент Землі 1.1. Представлення геомагнітного моменту поля Землі

Магнітний момент – це векторна величина, яка характеризує земну кулю як джерело магнітного поля. Макроскопічні магнітні моменти створюють замкнуті електричні струми і впорядковано орієнтовані магнітні моменти атомних частинок.

Розрахуємо магнітний момент M Землі на екваторі при $\Phi_{\text{маг. Екв.}} = 0$.

При цьому спочатку розглянемо елементи земного магнетизму.

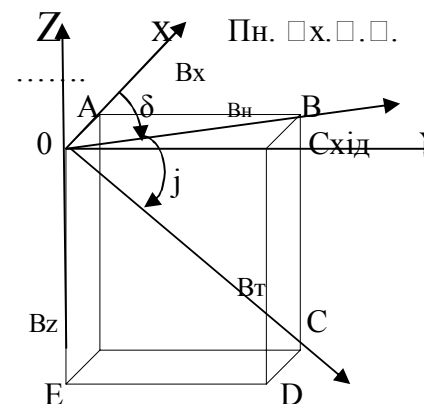


Рис.1.1. Елементи земного магнетизму

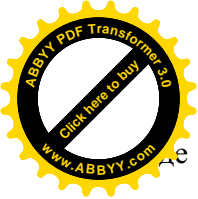
Проекції B_z і B_n індукції дипольного поля, або поля однорідного намагнічування Землі, можна знайти за допомогою формул.

Вертикальна складова геомагнітного поля Землі

$$B_z = \mu_0 \frac{M}{2\pi R^3} \sin \Phi_M \quad (1.1);$$

горизонтальна складова

$$B_n = \mu_0 \frac{M}{4\pi R^3} \cos \Phi_M \quad (1.2)$$



де μ_0 – магнітна стала;

M – магнітний момент земної кулі;

R – радіус Землі;

φ_M – геомагнітна широта, яка відрховується від геомагнітного екватора

Із приведених формул легко знайти модуль вектора індукції поля однорідного намагнічування Земної кулі:

$$\beta_T = \sqrt{B_Z^2 + B_H^2} \quad (1.3).$$

Підставляючи (1.1), (1.2) в (1.3), будемо мати:

$$\beta_T = \sqrt{\mu_0^2 \frac{M^2}{2\pi^2 R^6} \left(\sin^2 \varphi_M + \frac{\cos^2 \varphi_M}{4} \right)};$$

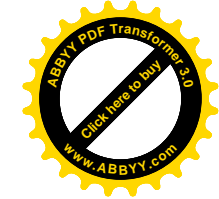
або:

$$\beta_T = \mu \frac{M}{2\pi R^3} \sqrt{\frac{4\sin^2 \varphi_M + \cos^2 \varphi_M}{4}}.$$

Приймаючи до уваги, що $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$, а $4\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 3\sin^2 \varphi + \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi$;

$$\beta_T = \mu \frac{M}{4\pi R^3} \sqrt{3\sin^2 \varphi + 1} \quad (1.4).$$

Знайдемо магнітний момент M із формули (1.4)



$$M = \frac{4\pi R^3 B_T}{\mu \sqrt{3\sin^2 \varphi_M + 1}} \quad (1.5).$$

Напруженість магнітного поля на магнітному екваторі $H_{\text{екв.}} = 0,34$ ерстеда [3, – с. 163].

Для переходу із системи СГСМ у систему СІ складемо слідууючу пропорцію

$$\text{Напруженості } 1 \frac{a}{M} \text{ відповідає } 4\pi \cdot 10^{-3} e, \\ H_{\text{екв.}} \text{ дорівнює } 0,34 e,$$

звідки

$$H_{\text{екв.}} = \frac{1 \frac{a}{M} \cdot 0,34 e}{4\pi \cdot 10^{-3} e} = 27,05634033 \frac{a}{M}.$$

В загальному випадку напруженість магнітного поля Землі можна розрахувати за формулою

$$H = \frac{B_T}{\mu_0} = \frac{M}{4\pi R^3} \sqrt{3\sin^2 \varphi_M + 1} \quad (1.6).$$

Тоді, загальна формула розрахунку магнітного моменту Землі буде

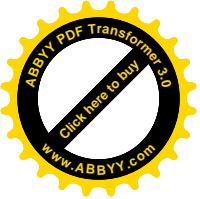
$$M = \frac{4\pi R^3 H}{\sqrt{1 + 3\sin^2 \varphi_M}}. \quad (1.7)$$

Для полюса $H_{\text{пол.}} = 0,66$ ерстед. Тоді, при переході до системи СІ

$$1 \frac{a}{M} \text{ відповідає } 4\pi \cdot 10^{-3} e,$$

$$H_{\text{пол.}} \text{ дорівнює } 0,66 e,$$

звідки



$$H_{\text{пол.}} = \frac{1 \frac{a}{m} \cdot 0,66e}{4\pi \cdot 10^{-3} e} = 52,52113122 \frac{a}{m}$$

Магнітний момент Землі біля полюсів

$$M_{\text{пол.}} = \frac{H_{\text{пол.}} \cdot 4\pi R^3}{\sqrt{1 + 3 \sin^2 90^\circ}}$$

Взявши радіус земної кулі $R=6371000\text{м}$, а $4\pi R^3=3,249620751 \cdot 10^{21} \text{ м}^3$, магнітний момент земної кулі на екваторі буде

$$M_{\text{екв.}} = \frac{3,249620751 \cdot 10^{21} [\text{м}^3] \cdot 27,05634033 \left[\frac{a}{m}\right]}{1} = 8,792284498 \cdot 10^{22} \text{ ам}^2$$

Розрахуємо магнітний момент земної кулі на полюсі

$$M_{\text{пол.}} = \frac{3,249620751 \cdot 10^{21} \cdot 52,52113122}{2} = 8,533687894 \cdot 10^{22} \text{ ам}^2$$

Розрахуємо магнітний момент Землі на широті 45° , прийнявши середнє значення напруженості

$$H_{45^\circ} = \frac{H_0 + H_{90^\circ}}{2} = \frac{0,34e + 0,66e}{2} = 0,50e$$

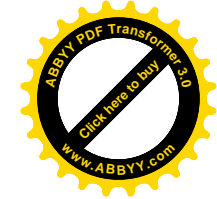
Тоді

$$1 \frac{a}{m} \text{ відповідає } 4\pi \cdot 10^{-3} e$$

$$H_{45^\circ} \text{ дорівнює } 0,5 e.$$

Звідки

$$H_{45^\circ} = \frac{1 \frac{a}{m} \cdot 0,5e}{4\pi \cdot 10^{-3} e} = 39,78873577 \frac{a}{m}$$



Таким чином, напруженість магнітного поля H_{45° буде

$$H_{45^\circ} = \frac{3,249620751 \cdot 10^{21} \text{ м}^3 \cdot 39,78873577 \frac{a}{m}}{\sqrt{1 + 3 \sin^2 45^\circ}}$$

$$H_{45^\circ} = 8,177542602 \cdot 10^{22} \text{ ам}^2$$

Знайдемо середню напруженість магнітного поля Землі для широти $22,5^\circ$

$$H_{22,5^\circ} = \frac{0,34e + 0,5e}{2} = 0,42 e,$$

для $\varphi_{\text{маг.}} = 67,5^\circ$

$$H_{67,5^\circ} = \frac{0,5e + 0,6e}{2} = 0,58e$$

для $\varphi_{\text{маг.}} = 22,5^\circ$

$$1 \frac{a}{m} \text{ відповідає } 4\pi \cdot 10^3 e$$

$$H_{22,5^\circ} \text{ дорівнює } 0,42 e$$

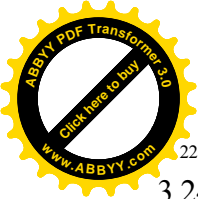
звідки

$$H_{22,5^\circ} = \frac{1 \frac{a}{m} \cdot 0,42e}{4\pi \cdot 10^3 e} = 33,422538 \frac{a}{m},$$

І по аналогії

$$H_{67,5^\circ} = \frac{1 \frac{a}{m} \cdot 0,58e}{4\pi \cdot 10^3 e} = 46,1549335 \text{ ам}^2.$$

Магнітні моменти будуть відповідно



$$M_{22,5^0} = \frac{3,249620751 \cdot 10^{21} \cdot 33,42253805}{\sqrt{1 + 3 \sin^2 22,5^0}} = 9,052956514 \cdot 10^{22} \text{ ам}^2,$$

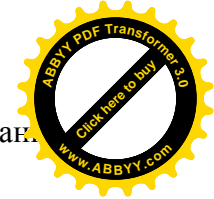
$$M_{67,5^0} = \frac{3,249620751 \cdot 10^{21} \cdot 46,1549335}{\sqrt{1 + 3 \sin^2 67,5^0}} = 7,948506716 \cdot 10^{22} \text{ ам}^2$$

Результати залежності геомагнітного моменту Землі від широти точки спостереження зведено в **Табл 1**.

Таблиця 1. Залежність геомагнітного моменту Землі від широти точки спостереження

№	$\varphi_{\text{маг.}} = X$	$Y = M = f(x) \left(\frac{a}{M}\right)$
1	0,00	$8,79 \cdot 10^{22}$ *
2	11,25	$8,9 \cdot 10^{22}$
3	22,5	$9,05 \cdot 10^{22}$
4	33,75	$8,5 \cdot 10^{22}$
5	45	$8,18 \cdot 10^{22}$
6	56,25	$8 \cdot 10^{22}$
7	67,5	$7,95 \cdot 10^{22}$
8	78,75	$8,12 \cdot 10^{22}$
9	90	$8,53 \cdot 10^{22}$
n=9		$\Sigma = 76,02 \cdot 10^{22}$

Згідно формули (1,7) магнітний момент залежить від напруженості магнітного поля і широти точки спостереження, тобто є функцією двох незалежних змінних, хоча в свою чергу напруженість геомагнітного поля також залежить від широти. На жаль, у нас немає формули залежності напруженості магнітного



поля від широти, що не потребувало б знань про величину магнітного моменту і навпаки.

Тому безперечний інтерес представляє встановлення функціональної залежності магнітного моменту, як головного компонента для визначення складових геомагнітного поля Землі, від геомагнітної широти.

Примітка. В подальшому для спрощення викладок множник 10^{22} писати не будемо, але його слід мати на увазі, особливо при оцінці точності результатів.

1.2. Представлення істинної моделі

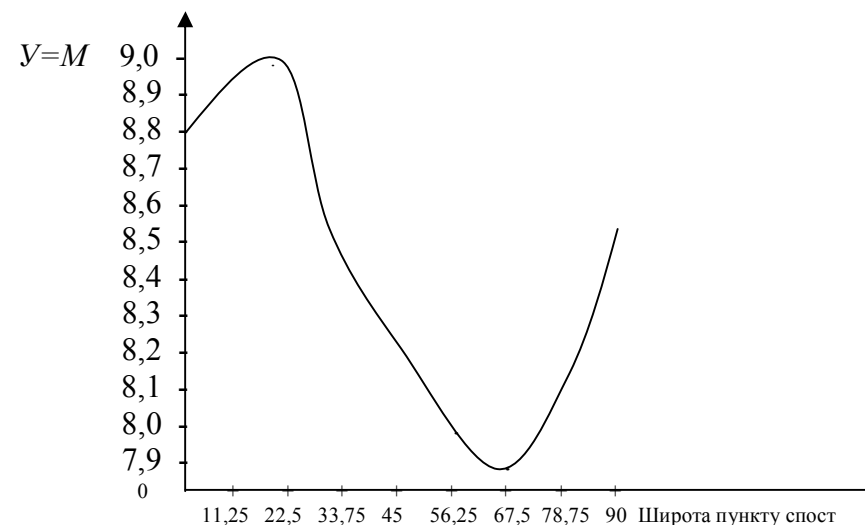
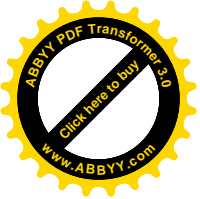


Рис. 1. Графік залежності магнітного моменту земної кулі від геомагнітної широти

Маючи вузлові точки значень геомагнітного моменту Землі в магнітних широтах $0, 22,5^0, 45^0, 67,5^0$ і 90^0 побудуємо точкову діаграму і графік, представлений на рис. 1.

Із цього графіка видно, що екстремум функції буде на широті $22,5^0$ і $67,5^0$. Як видно із графіка, кращою функцією для апроксимації буде кубічний поліном, тобто будемо шукати функціональну залежність у вигляді функції виду



$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (1.2.1)$$

Невідомі коефіцієнти a, b, c, d визначимо по способу найменших квадратів.

Проміжні точки в $11,25^0, 33,75^0, 56,25^0$ і $78,75^0$ визначимо безпосередньо із графіка. Цього нам буде цілком достатньо для побудови експериментальної моделі.

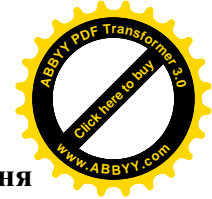
Побудовану таким чином експериментальну модель залежності магнітного моменту земної кулі від широти в подальшому зрівноважили і отримали формулу [7,с.38]

$$Y=M=1.2190*10^{-5} X^3 -1.4404*10^{-3} X^2 +2.8370*10^{-2}X+8,8028(1.2.2)$$

яку прийемо за істинну модель і, генеруючи істинні похибки будемо створювати спотворені моделі, на яких можна дослідити точність визначення магнітного моменту в залежності від похибки визначення широти.

Таблиця 2.Залежність геомагнітного моменту Землі від широти точки спостереження (істинна модель за формулою 1.1)

№	$\varphi_{\text{маг.}} = X$	$Y = M = f(x)\left(\frac{a}{M}\right)$
1	0,00	8,803
2	11,25	8,957
3	22,5	8,851
4	33,75	8,598
5	45	8,274
6	56,25	8,011
7	67,5	7,904
8	78,75	8,057
9	84,375	8,264
10	90	8,575
n=9	489,375	84,294



Розділ 2. Побудова спотвореної моделі

2.1. Генерування істинних похибок для дослідження математичної моделі методом статистичних випробувань Монте Карло

В роботі [1] істинна модель спотворювалась введенням істинних похибок в незалежні змінні X. В даній монографії істинні похибки будемо вводити в експериментальні параметри Y.

Приведемо методику розрахунку випадкових чисел, які прийемо в подальшому, як істинні похибки для побудови спотвореної моделі.

1. Отримавши ряд випадкових (а точніше псевдо-

$$\text{випадкових) чисел } \xi_{cp}, \quad \xi_{cp} = \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i}{n}, \quad (2.1.1)$$

Де n – сума випадкових чисел.

2. Розраховуються попередні значення істинних похибок Δ'_i за формулою

$$\Delta'_i = \xi_i - \xi_{cp} \quad (2.1.2)$$

3. Знаходять середню квадратичну похибку попередніх істинних похибок за формулою Гауса

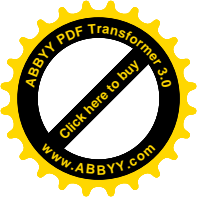
$$m_{\Delta'} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \Delta'^2_i}{n}} \quad (2.1.3)$$

4. Знаходять коефіцієнт пропорційності K, для визначення істинних похибок необхідності точності

$$K = \frac{c}{m'_{\Delta}}, \quad (2.1.4)$$

де c – необхідна константа.

Так, наприклад, при $m'_{\Delta} = 0,28$ і необхідності побудови математичної моделі з точністю $c = 0,1$, будемо мати



$$K_{0,1} = \frac{0,1}{0,28} = 0,357, \text{ а при } c = 0,05, \text{ отримаємо}$$

$$K = \frac{0,05}{0,28} = 0,178.$$

5. Істинні похибки розраховуються за формулою

$$\Delta_i = \Delta'_i \cdot K \quad (2.1.5)$$

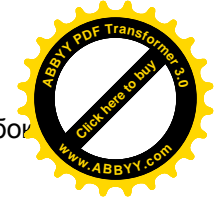
6. Заключним контролем служить розрахунок середньої квадратичної похибки m_{Δ} генерованих істинних похибок Δ

$$m_{\Delta} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \Delta^2}{n}} \quad (2.1.6)$$

і порівняння $m_{\Delta} = c \quad (2.1.7)$

Таблиця 3. Генерування псевдо-випадкових чисел і розрахунок істинних похибок

№	ξ_i	ξ_{cp}	$\Delta'_i = \xi_i - \xi_{cp}$	$\Delta_i'^2$	$\Delta_i = \Delta'_i \cdot K$	Δ_i^2
1	0,21	0,376	-0,166	0,02756	-0,0820	0,00673017
2	0,78	0,376	0,404	0,16322	0,19966	0,03986323
3	0,41	0,376	0,034	0,00116	0,0168	0,00028234
4	0,07	0,376	-0,306	0,09364	-0,1512	0,02286928
5	0,26	0,376	-0,116	0,01346	-0,0573	0,00328644
6	0,57	0,376	0,194	0,03764	0,09588	0,00919207
7	0,56	0,376	0,184	0,03386	0,09093	0,00826886
8	0,36	0,376	-0,016	0,00026	-0,0079	0,00006252
9	0,36	0,376	-0,016	0,00026	-0,0079	0,00006252
10	0,18	0,376	-0,196	0,03842	-0,0969	0,00938257
n=10	3,76	3,76	0	0,40944	0,0E+00	0,10000000



Середня квадратична похибка попередніх істинних похибок

$$\Delta'_o = \sqrt{\frac{0,40944}{10}} = 0,2023488488$$

Коефіцієнт пропорційності $K = \frac{0,1}{0,2023488488} = 0,4941960411$

Середня квадратична похибка при генеруванні випадкових чисел з точністю $c = 0,1$

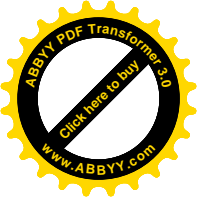
$$m_{\Delta_i} = \sqrt{\frac{0,1000000}{10}} = 0,1$$

2.2. Представлення спотвореної моделі

Таблиця 4. Побудова спотвореної моделі

№	Істинна модель		Δ_i	$Y_{спотв.} = Y_{icm.} + \Delta_i$
	x_{icm}	y_{icm}		
1	0	8,803	-0,0820	8,721
2	11,25	8,957	0,19966	9,157
3	22,5	8,851	0,0168	8,8678
4	33,75	8,598	-0,1512	8,4468
5	45	8,274	-0,0573	8,2167
6	56,25	8,011	0,09588	8,1069
7	67,5	7,904	0,09093	7,9949
8	78,75	8,057	-0,0079	8,0491
9	84,375	8,264	-0,0079	8,2561
10	90	8,575	-0,0969	8,4781
	489,375	84,294	0,0E+00	84,294

По даним спотвореної моделі виконують строге зрівноваження методом найменших квадратів і отримують ймовірнішу модель, роблять оцінку точності зрівноважених елементів і дають порівняльний аналіз.



Розділ 3. Зрівноваження моделі

3.1. Представлення системи нормальних рівнянь

У результаті проведеного експерименту ми маємо ряд результатів X_i, V_i , функціональну залежність між якими будемо шукати за допомогою поліному степені K , де коефіцієнти a_i являються невідомими.

$$\begin{aligned} \text{Тоді, система нормальних рівнянь буде} \\ na_0 + a_3[x] + a_2[x^2] + \dots + a_m[x^m] - [y] = 0, \\ a_0[x] + a_3[x^2] + a_2[x^3] + \dots + a_m[x^{m+1}] - [xy] = 0, \\ a_0[x^2] + a_1[x^3] + a_2[x^4] + \dots + a_m[x^{m+1}] - [x^2y] = 0, \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

$$a_0[x^m] + a_1[x^{m+1}] + a_2[x^{m+2}] + \dots + a_m[x^{2m}] - [x^m y] = 0,$$

де знаком $[\]$ позначена сума відповідного елемента.

Для поліному третього порядку виду

$$y = ax^3 + vx^2 + cx + d \quad (3.1.2)$$

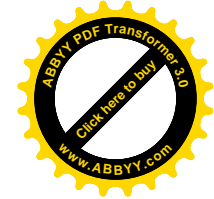
Система нормальних рівнянь буде

$$\begin{aligned} dn + c[x] + v[x^2] + a[x^3] - [y] = 0, \\ d[x] + c[x^2] + v[x^3] + a[x^4] - [xy] = 0, \\ d[x^2] + c[x^3] + v[x^4] + a[x^5] - [x^2y] = 0, \\ d[x^3] + c[x^4] + v[x^5] + a[x^6] - [x^3y] = 0. \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

або

$$\begin{aligned} a[x^6] + v[x^5] + c[x^4] + d[x^3] - [x^3y] = 0, \\ a[x^5] + v[x^4] + c[x^3] + d[x^2] - [x^2y] = 0, \\ a[x^4] + v[x^3] + c[x^2] + d[x] - [xy] = 0, \\ a[x^3] + v[x^2] + c[x] + dn - [y] = 0. \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

В подальшому будемо рішати систему лінійних нормальних рівнянь (3.1.3) або (3.1.4) одним із відомих в математиці способів.

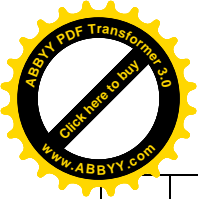


3.2. Встановлення коефіцієнтів нормальних рівнянь

Приведемо розрахункову таблицю, на основі якої стримують коефіцієнти нормальних рівнянь.

Таблиця 5. Розрахунок коефіцієнтів нормальних рівнянь

№	$x_{i\text{снн}}$	$y_{\text{снн}}$	x^0	x^2	x^3	x^4	x^5
1	0	8,721	1	0	0	0	0
2	11,25	9,157	1	126,563	1423,828	16018,066	180203,247
3	22,5	8,8678	1	506,250	11390,625	256289,063	5766503,906
4	33,75	8,4468	1	1139,063	38443,359	1297463,379	43789389,038
5	45	8,2167	1	2025,000	91125,000	4100625,000	184528125,000
6	56,25	8,1069	1	3164,063	177978,516	10011291,504	563135147,095
7	67,5	7,9949	1	4556,250	307546,875	20759414,063	1401260449,219
8	78,75	8,0491	1	6201,563	488373,047	38459377,441	3028675973,511
9	84,375	8,2561	1	7119,141	600677,490	50682163,239	4276307523,251
10	90	8,4781	1	8100,000	729000,000	65610000,000	5904900000,000
Σ	489,375	84,294	10	32937,891	2445958,740	191192641,754	15408543314,266

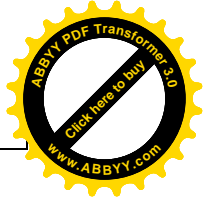


Продовження таблиці 5

№	x^6	xy	x^2y	x^3y
1	0	0	0	0
2	2027286,530	103,0124	1158,889	13037,50687
3	129746337,891	199,525565	4489,325	101009,8172
4	1477891880,035	285,078625	9621,404	324722,3708
5	8303765625,000	369,750263	16638,76	748744,2833
6	31676352024,078	456,011734	25650,66	1442849,627
7	94585080322,266	539,657994	36426,91	2458816,735
8	238508232913,971	633,866055	49916,95	3930959,956
9	360813447274,268	696,607827	58776,29	4959249,079
10	531441000000,000	763,032269	68672,9	6180561,382
Σ	1266937543664,040	4046,543	271352,1	20159950,8

Таким чином, на основі проведених розрахунків нами отримана наступна матриця коефіцієнтів нормальних рівнянь

10,0	489,4	32937,9	2445958,7
489,4	32937,9	2445958,7	191192641,8
32937,9	2445958,7	191192641,8	15408543314,3
2445958,7	19119264	15408543314,	1266937543664,0



	2	3
--	---	---

3.3. Рішення системи лінійних рівнянь способом Крамера

Нехай, маємо систему лінійних рівнянь

$$\begin{aligned}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\
 \dots & \\
 a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n.
 \end{aligned}
 \tag{3.3.1}$$

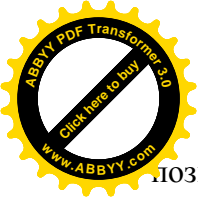
Для того, щоб із цієї системи визначити невідомі s , складемо із коефіцієнтів при невідомих визначник Δ , який називається визначником системи рівнянь (3.3.1).

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}
 \tag{3.3.2}$$

Помножимо ліву і праву частини рівності (3.3.2) на x_i . В лівій частині будемо мати Δx_i , в правій же частині введемо у всі члени i -го стовпчика визначника a_k і множник x_i

$$\Delta \cdot x_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i}x_i \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i}x_i \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni}x_i \dots a_{nn} \end{vmatrix}
 \tag{3.3.3}$$

Потім до i -го стовпчика визначника (3.3.3) додамо всі інші стовпчики, помножені відповідно на x_1, x_2, \dots, x_n . Величина визначника від цього не зміниться. Тоді i -стовпчик представить собою ліву частину системи рівнянь (3.3.1).



Замінімо його вільними членами цієї системи і позначимо через Δ_i

$$\Delta \cdot x_i = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \dots a_{nn} \end{vmatrix} \quad (3.3.4)$$

$$\text{Звідки, } x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \dots a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \dots a_{nn} \end{vmatrix}}. \quad (3.3.5)$$

Формула (3.3.5) дає можливість визначити кожне невідоме системи лінійних рівнянь (3.3.1).

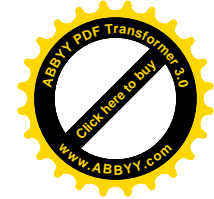
Якщо вільні члени системи лінійних рівнянь рівні нулю, то вона буде системою лінійних однокорінних рівнянь.

Система лінійних одно корінних рівнянь може мати рішення відмінне від нульового, якщо визначник системи Δ рівний нулю.

Для системи чотирьох лінійних рівнянь

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= b_3, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 &= b_4, \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

якщо визначник системи Δ не дорівнює нулю



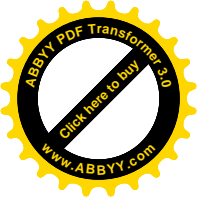
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \neq 0, \quad (3.3.7)$$

то система визначника і по Крамеру її невідомі виражаються формулами

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ b_4 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad (3.3.8)$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & b_4 & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad (3.3.9)$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & b_2 & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & b_3 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & b_4 & a_{44} \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad (3.3.10)$$



$$x_4 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & b_4 \end{vmatrix}}{\Delta} \quad (3.3.11)$$

Як бачимо, що

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ b_4 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad (3.3.12)$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & b_3 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & b_4 & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad (3.3.13)$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & b_2 & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & b_3 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & b_4 & a_{44} \end{vmatrix}, \quad (3.3.14)$$

$$\Delta_{x_4} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & b_4 \end{vmatrix}. \quad (3.3.15)$$



Приведемо формулу знаходження визначника четвертого порядку

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = (a_{23}a_{43} - a_{33}a_{42})(a_{11}a_{24} - a_{14}a_{21}) + \\ + (a_{32}a_{44} - a_{34}a_{42})(a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23}) + (a_{31}a_{43} - a_{33}a_{41})(a_{14}a_{22} - a_{12}a_{24}) + \\ + (a_{31}a_{42} - a_{32}a_{41})(a_{13}a_{24} - a_{14}a_{23}) + (a_{33}a_{44} - a_{34}a_{43})(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) + \\ + (a_{31}a_{44} - a_{34}a_{41})(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}). \quad (3.3.16)$$

І в нашому випадку визначник системи D = 1,38204E+21

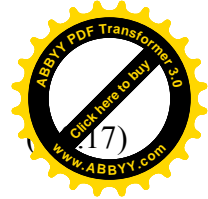
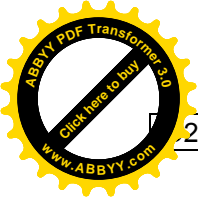
1266937543664,0			
4	15408543314,27	191192642	2445959
15408543314,266	191192642	2445959	32937,891
191192641,754	2445959	32938	489
2445958,740	32938	489	10

20159950,7574	15408543314	191192642	2445959
271352,09622	191192642	2445959	32938
4046,5427317	2445959	32938	489
84,294000000	32938	489	10
D1=	1,53469E+16		

тоді невідомий коефіцієнт a при x³ буде

$$\hat{a} = \tilde{\delta}_1 = \frac{D1}{D} = \frac{1.53469E+16}{1.38204E+21} = 0,000011105;$$

1266937543664	20159950,757	191192642	2445959
15408543314	271352,096	2445959	32938
191192642	4046,543	32938	489,375
2445959	84,2940	489,375	10



D2=	-1,8157E+18		
-----	-------------	--	--

тоді невідомий коефіцієнт b при x^2 буде

$$b = x_2 = \frac{D2}{D} = \frac{-1.8157E + 18}{1.38204E + 21} = -0,001314;$$

1266937543664	15408543314	20159951	2445958,7
15408543314	191192642	271352	32937,891
191192642	2445959	4047	489,375
2445959	32938	84,294	10
D3=	3,4332E+19		

і невідомий коефіцієнт c при x буде

$$c = x_3 = \frac{D3}{D} = \frac{3.4332E + 19}{1.38204E + 21} = 0,024841;$$

1266937543664	15408543314	191192642	20159951
15408543314	191192642	2445959	271352
191192642	2445959	32938	4047
2445959	32938	489,375	84,294
D4=	1,2196E+22		

коефіцієнт d буде

$$d = \frac{D4}{D} = \frac{1,2196E + 22}{1.38204E + 21} = 8,825023.$$

Таким чином, на основі проведених досліджень, математична модель залежності магнітного моменту планети Земля y_i від широти пункту спостереження x_i виражається формулою

$$y' = 0,000011105x^3 - 0,001314x^2 + 0,024841x + 8,825023.$$

Розділ 4. Оцінка точності

4.1. Контроль зрівноваження

Підставляючи отримані значення коефіцієнтів a, b, c, d у формулу (3.4), отримаємо наступні результати.

Таблиця 6. Коефіцієнти нормальних рівнянь і контроль зрівноваження

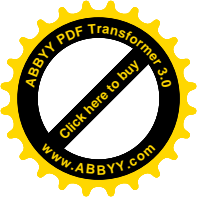
	x^3	x^2	x	x^0	y	Контроль
x^3	1266937543664	15408543314	191192642	2445959	20159950,76	20159950,76
x^2	15408543314	191192642	2445959	32937,891	271352,096	271352,096
x	191192642	2445959	32938	489	4046,543	4046,543
x^0	2445959	32938	489	10	84,294	84,294
	0,000011105	-0,001314	0,024841	8,825023		
	Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.	b	c	d		

$$[YU] - d[YX^3] - b[YX^2] - c[YX] - d[Y]$$

$$= 0,090057605. \quad \text{З другої сторони } [VV] = 0,090058$$

4.2. Оцінка точності параметрів, отриманих із рішення системи нормальних рівнянь

Середні квадратичні похибки визначаємих x_1, x_2, x_3, x_4 розраховуються за формулами:



$$m_{x_1} = \mu \sqrt{\frac{A_{11}}{D}}, \quad (4.2.1)$$

$$m_{x_2} = \mu \sqrt{\frac{A_{22}}{D}}, \quad (4.2.2)$$

$$m_{x_3} = \mu \sqrt{\frac{A_{33}}{D}}, \quad (4.2.3)$$

$$m_{x_4} = \mu \sqrt{\frac{A_{44}}{D}}, \quad (4.2.4)$$

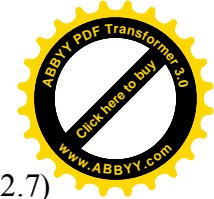
де $m_{x_1}, m_{x_2}, m_{x_3}, m_{x_4}$ – середні квадратичні похибки визначаємих невідомих x_1, x_2, x_3, x_4 , μ – середня квадратична похибка одиниці ваги, яка розраховується за формулою

$$\mu = \sqrt{\frac{[VV]}{n - K}} \quad (4.2.5)$$

У формулі (4.2.5) n - число початкових рівнянь, K - число невідомих. В нашому випадку $n = 10; K = 4$. V - різниця між вихідним значенням y_i і вирахованим значенням y' за отриманою нами формулою (3.3.17);

$$V_i = y_i - y'_i \quad (4.2.6)$$

$A_{11}, A_{22}, A_{33}, A_{44}$ – алгебраїчні доповнення першого, другого, третього і четвертого діагональних елементів



$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad (4.2.7)$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad (4.2.8)$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad (4.2.9)$$

$$A_{44} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad (4.2.10)$$

$$\text{де } \Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}. \quad (4.2.11)$$

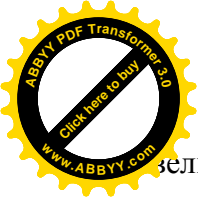
Приведемо формулу розкриття визначника третього порядку

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}).$$

$$(4.2.12)$$

І в нашому випадку отримаємо

		19119264		
		2	2445959	32938
A11=	4,7761E+11	2445959	32938	489,375
		32937,891	489,375	10



зеличина оберненої ваги

$$\frac{1}{P_{x_1}} = \frac{A_{11}}{D} = \frac{4.7761E+11}{1,38204E+21} = 3.45593E-10, \text{ а}$$

$$\sqrt{\frac{1}{P_{x_{11}}}} = 0,00001859.$$

		1266937543664	191192642	2445959
A22=	8,99382E+15	191192642	32938	489,375
		2445959	489	10

$$\frac{1}{P_{x_2}} = \frac{A_{22}}{D} = \frac{8,99382E+15}{1.38204E+21} = 0,000006508; \sqrt{\frac{1}{P_{x_{22}}}} = 0,00255.$$

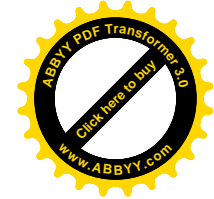
A33=	1,24719E+19	1266937543664	15408543314	2445959
		15408543314	191192642	32938
		2445959	32938	10

$$\frac{1}{P_{x_3}} = \frac{A_{33}}{D} = \frac{1,24719E+19}{1.38204E+21} = 0,00902; \sqrt{\frac{1}{P_{x_{33}}}} = 0,0950.$$

		1266937543664	15408543314	191192642
A44=	1.1858101E+21	15408543314	191192642	2445959
		191192642	2445959	32938

$$\frac{1}{P_{x_4}} = \frac{A_{44}}{D} = \frac{1,1858101E+21}{1.38204E+21} = 0,8580; \sqrt{\frac{1}{P_{x_{44}}}} = 0,9263.$$

Підставляючи у виведену нами, формулу (3.3.17) значення X спотвореної моделі отримаємо розрахункові значення y' , які будуть дещо відрізнятись від вихідних значень Y .



Таблиця 6. порівняльний аналіз результатів строгого зрівноваження

№	$x_{i\text{стн.}}$	$y_{\text{спотв.}}$	$y'_{\text{зрівноваж}}$	$V = y_i - y'_i$	V^2
1	0	8,721	8,8250231	-1,041E-01	0,01082863
2	11,25	9,157	8,9540197	2,026E-01	0,041062198
3	22,5	8,8678	8,8453228	2,248E-02	0,000505353
4	33,75	8,4468	8,5937986	-1,470E-01	0,021616203
5	45	8,2167	8,2943129	-7,764E-02	0,006028028
6	56,25	8,1069	8,0417319	6,514E-02	0,004243665
7	67,5	7,9949	7,9309215	6,401E-02	0,004097509
8	78,75	8,0491	8,0567477	-7,655E-03	5,85984E-05
9	84,375	8,2561	8,2380452	1,805E-02	0,000325713
10	90	8,4781	8,5140767	-3,594E-02	0,001291708
$n=10$	489,375	84,294	84,29	0,0000000	0,090058

Тоді, середня квадратична похибка одиниці ваги буде

$$\mu = \sqrt{\frac{[VV]}{n-K}} = 0,122513676.$$

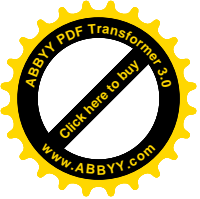
Середня квадратична похибка визначення коефіцієнта a

$$m_a = \mu \sqrt{\frac{1}{P_a}} = 0,122513676 * 0,00001859 = 2,27752E-06$$

Середня квадратична похибка визначення коефіцієнта b

$$m_b = \mu \sqrt{\frac{1}{P_b}} = 0,122513676 * 0,00255 = 0,000312534$$

Середня квадратична похибка визначення коефіцієнта c



$$m_c = \mu \sqrt{\frac{1}{P_c}} = 0,122513676 * 0,0950 = 0,011638366.$$

Середня квадратична похибка визначення коефіцієнта d

$$m_d = \mu \sqrt{\frac{1}{P_d}} = 0,122513676 * 0,9263 = 0,113483432.$$

Середні квадратичні похибки зрівноваженої функції $m\phi=$

0,11348343
0,07018397
0,07458509
0,0685238
0,061908
0,06840348
0,07279229
0,06204478
0,06653025
0,09944585

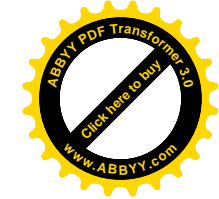
Перевірка моделі на адекватність за критерієм Фішера

Перевірка на адекватність за критерієм Фішера		
27,34771	>	4,533677
Модель адекватна експериментальним даним		

Встановлення значимості коефіцієнтів регресії

Коефіцієнти регресії значимі			
ta=	4,875737	t(0,05;6)=	2,44691 2
tb=	4,203754		
tc=	2,134437	t(0,08;6)=	2,10430 6

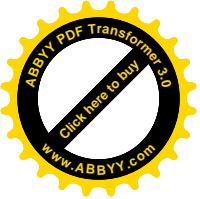
td=	77,76486		
-----	----------	--	--



Висновки

На основі проведених досліджень в даній роботі:

1. Генеровані випадкові числа, які приведено до нормованої досліджуваної точності.
2. На основі істинної моделі і генерованих істинних похибок побудована спотворена модель залежності магнітного моменту Землі від широти.
3. Математична модель апроксимована по способу найменших квадратів кубічним поліномом.
4. Отримана формула $y' = 0,000011105x^3 - 0,001314x^2 + 0,024841x + 8,825023$.
залежності магнітного моменту Землі Y від широти X .
5. Встановлено, що середня квадратична похибка одиниці ваги за результатами зрівноваження складає $\mu = 0,122513676 * 10^{22} \text{ ам}^2$.
6. Середня квадратична похибка визначення коефіцієнта a при x^3 $m_a = 2,27752E - 06$;
 - середня квадратична похибка визначення коефіцієнта b при x^2 $m_b = 0,000312534$;

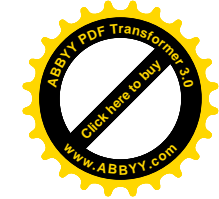


- середня квадратична похибка визначення коефіцієнта c при x $m_c = 0,011638366$;
- середня квадратична похибка визначення коефіцієнта d при $m_d = 0,113483432$.

середні квадратичні похибки зрівноваженої функції $m\phi =$

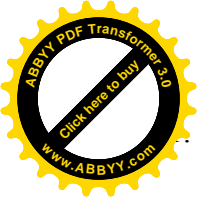
0,11348343
0,07018397
0,07458509
0,0685238
0,061908
0,06840348
0,07279229
0,06204478
0,06653025
0,09944585

7. Розроблена методика підготовки істинних похибок наперед заданої точності.
8. Дана робота відкриває дорогу для проведення досліджень методом статистичних випробувань Монте Карло.
9. Вона дає можливість охопити велику аудиторію, тому що генеруються похибки індивідуально і вони не повторюються в других моделях.
10. Робота виконується вперше. Нам не відомі літературні джерела, де б виконувались аналогічні дослідження в курсі Фізики з основами геофізики.



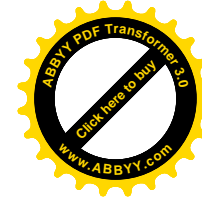
Літературні джерела

1. Букеєв Б.О. Дослідження точності апроксимації залежності магнітного моменту Землі від широти методом статистичних випробувань Монте Карло. Модель ПГБ 61.-МЕГУ, Рівне, 2006, -29с.
2. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. – М.: Наука, 1973,-831с.
3. Кошкин Н. И., Ширкевич М. Г. Справочник по элементарной физике. – М.: Наука, 1972,-255с.
4. Кучерук І. М., Горбачук І. Т., Луцик П. П. Загальний курс фізики. Т. 1. – К.: Техніка, 1999,-536с.
5. Кучерук І. М., Горбачук І. Т., Луцик П. П. Загальний курс фізики. Т. 2. – К.: Техніка, 1999,-452с.
6. Кучерук І. М., Горбачук І. Т. Загальний курс фізики. Т.3 . – К.: Техніка, 1999,-520с.
7. Літнарівич Р. М. Дослідження точності апроксимації залежності магнітного моменту Землі від широти методом статистичних випробувань Монте Карло. Частина 1. МЕГУ, Рівне, 2006,-44с.
8. Літнарівич Р.М. Встановлення зв'язку між географічною і геомагнітною системами координат. Частина 2.МЕГУ,Рівне,2006,-47с.
9. Літнарівич Р.М. Фізика з основами геофізики. Курс лекцій.МЕГУ,Рівне,2007,-78с.
10. Літнарівич Р.М. Фізика з основами геофізики. Лабораторний практикум. Частина 1.МЕГУ,Рівне,2007,-44с.



Літнарівич Р.М. Фізика з основами геофізики. Лабораторний практикум. Частина 2. МEGУ, Рівне, 2008, - 48с.

12. Мудров В. И., Кушко В. Л. Методы обработки измерений. – М.: Сов. радио, 1976, -192с.
13. Пастушенко С. М. Формули і закони загальної фізики: навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів. 2е вид.: Діал., 2005, -2668с.
14. Рего К. Г. Метрологическая обработка результатов технических измерений. Справочное пособие. – К.:Техніка, 1987, -126с.
15. Розв'язування задач з курсу загальної фізики. Практикум/Остроухов А. А., Стрижевський В. Л., Цвілих М. Г. та інші. –К.: Радянська школа, 1966, -503с
16. Савельев И. В. Курс физики. Т.1. –М.:Наука, 1989, -352с
17. Савельев И. В. Курс физики. Т.2. –М.:Наука, 1989, -464с
18. Савельев И. В. Курс общей физики. –М.:Наука, 1982, - 304с
19. Ситніков О. П. Основи електродинаміки. Лабораторний практикум. Чернігів: ЧДІЕіУ, 2003, -48с
20. Суботін С. І. Кора і мантія Землі. –К.: Знання, 1996, -39с.
21. Топографо-геодезические термины: справочник/ Кузьмин Б. С., Герасимов Ф. Я., Молоканов В. М. и др. – М.: Недра, 1989, -261с.
22. Федоров Є. П. Обертання Землі. – К.:Знання, 1966, -52с
23. Фізика з використанням обчислювальної техніки. Практичний курс/ В. М. Казанський, В. І. Кланченко, Д. Кошелева та ін. – К.: Либідь, 1993, -224с.



Додатки

Додаток 1.

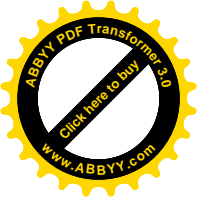
Генерування псевдовипадкових чисел, підпорядкування їх нормальному закону розподілу і розрахунок істинних похибок

0,21	0,376	-0,166	0,02756	-0,0820	0,00673017
0,78	0,376	0,404	0,16322	0,19966	0,03986323
0,41	0,376	0,034	0,00116	0,0168	0,00028234
0,07	0,376	-0,306	0,09364	-0,1512	0,02286928
0,26	0,376	-0,116	0,01346	-0,0573	0,00328644
0,57	0,376	0,194	0,03764	0,09588	0,00919207
0,56	0,376	0,184	0,03386	0,09093	0,00826886
0,36	0,376	-0,016	0,00026	-0,0079	0,00006252
0,36	0,376	-0,016	0,00026	-0,0079	0,00006252
0,18	0,376	-0,196	0,03842	-0,0969	0,00938257
3,76	3,76	0	0,40944	0,0E+00	0,10000000
A	B	C	D	E	F

Додаток 2.

Побудова спотвореної моделі

0	8,803	-0,0820	8,721
11,25	8,957	0,19966	9,157
22,5	8,851	0,0168	8,8678
33,75	8,598	-0,1512	8,4468
45	8,274	-0,0573	8,2167
56,25	8,011	0,09588	8,1069



67,5	7,904	0,09093	7,9949
78,75	8,057	-0,0079	8,0491
84,375	8,264	-0,0079	8,2561
90	8,575	-0,0969	8,4781
489,375	84,294	0,0E+00	84,294
I	G	E	H
Хексп.=Хістн.	Уістн.	Істинні похиб.	Усптв.

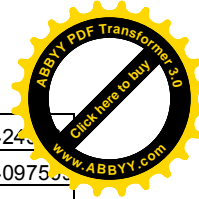
Додаток 3.

Розрахункова таблиця

0	1	0	0	0	0	0
11,25	1	126,563	1423,828	16018,066	180203,247	2027286,530
22,5	1	506,250	11390,625	256289,063	5766503,906	129746337,891
33,75	1	1139,063	38443,359	1297463,379	43789389,038	1477891880,035
45	1	2025,000	91125,000	4100625,000	184528125,000	8303765625,000
56,25	1	3164,063	177978,516	10011291,504	563135147,095	31676352024,078
67,5	1	4556,250	307546,875	20759414,063	1401260449,219	94585080322,266
78,75	1	6201,563	488373,047	38459377,441	3028675973,511	238508232913,971
84,375	1	7119,141	600677,490	50682163,239	4276307523,251	360813447274,268
90	1	8100,000	729000,000	65610000,000	5904900000,000	531441000000,000
489,375	10	32937,891	2445958,740	191192641,754	15408543314,266	1266937543664,040
I	J	K	L	M	N	O
Хексп.=Хістн.	X0	X^2	X^3	X^4	X^5	X^6

Продовження розрахункової таблиці

0	0	0	8,8250231	-1,041E-01	0,01082863
103,0124	1158,889	13037,50687	8,9540197	2,026E-01	0,041062198
199,525565	4489,325	101009,8172	8,8453228	2,248E-02	0,000505353
285,078625	9621,404	324722,3708	8,5937986	-1,470E-01	0,021616203
369,750263	16638,76	748744,2833	8,2943129	-7,764E-02	0,006028028

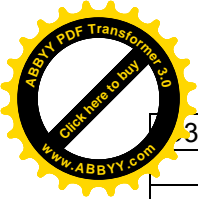


456,011734	25650,66	1442849,627	8,0417319	6,514E-02	0,00424
539,657994	36426,91	2458816,735	7,9309215	6,401E-02	0,0040975
633,866055	49916,95	3930959,956	8,0567477	-7,655E-03	5,85984E-05
696,607827	58776,29	4959249,079	8,2380452	1,805E-02	0,000325713
763,032269	68672,9	6180561,382	8,5140767	-3,594E-02	0,001291708
4046,543	271352,1	20159950,8	84,29	0,0000000	0,090058
P	Q	R	S	T	U
YX	YX^2	YX^3	Y'зрівн.	V=Yсптв.-Yз	VV

Додаток 4.

Розрахунок визначників

1266937543664,04	15408543314,27	191192642	2445959
15408543314,266	191192642	2445959	32937,891
191192641,754	2445959	32938	489
2445958,740	32938	489	10
D=	1,38204E+21		
20159950,7574	15408543314	191192642	2445959
271352,09622	191192642	2445959	32938
4046,5427317	2445959	32938	489
84,294000000	32938	489	10
D1=	1,53469E+16		
1266937543664	20159950,757	191192642	2445959
15408543314	271352,096	2445959	32938
191192642	4046,543	32938	489,375
2445959	84,2940	489,375	10
D2=	-1,8157E+18		
1266937543664	15408543314	20159951	2445958,7
15408543314	191192642	271352	32937,891
191192642	2445959	4047	489,375
2445959	32938	84,294	10



D3=	3,4332E+19			
	1266937543664	15408543314	191192642	20159951
	15408543314	191192642	2445959	271352
	191192642	2445959	32938	4047
	2445959	32938	489,375	84,294
D4=	1,2196E+22			

Додаток 5.

Вільні члени нормальних рівнянь

20159950,76
271352,096
4046,543
84,294

Додаток 6.

Розрахунок коефіцієнтів апроксимуючого поліному

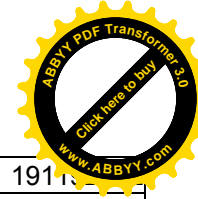
a=D1/D=	0,000011105
b=D2/D=	-0,001314
c=D3/D=	0,024841
d=D4/D=	8,825023
Y=aX^3+bX^2+cX+d	

Нами виведена формула за результатами теоретичних досліджень:

$$y' = 0,000011105x^3 - 0,001314x^2 + 0,024841x + 8,825023.$$

Додаток 7.

Знаходження алгебраїчних доповнень



		1266937543664	15408543314	191192642
A44=	1,1858101,E+21	15408543314	191192642	2445959
		191192642	2445959	32938

		1266937543664	191192642	2445959
A22=	8,99382E+15	191192642	32938	489,375
		2445959	489	10

A33=	1,24719,E+19	1266937543664	15408543314	2445959
		15408543314	191192642	32938
		2445959	32938	10

		191192642	2445959	32938
A11=	4,7761E+11	2445959	32938	489,375
		32937,891	489,375	10

Додаток 8.

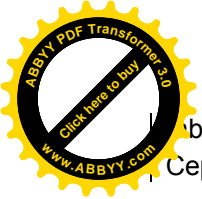
Контроль зрівноваження

[yy]-	a[yx^3]-	b[yx^2]	- c[yx] -	d[y]	=	0,090057605
					[VV] =	0,090057605
					Різниця=	0,000000

Додаток 9.

Оцінка точності зрівноважених елементів

Середня квадратична похибка одиниці ваги	
μ=	0,122513676
Середня квадратична похибка коефіцієнта a	
ma=	2,27752E-06
Середня квадратична похибка коефіцієнта b	
	0,000312534



b= Середня квадратична похибка коефіцієнта c

mc= 0,011638366

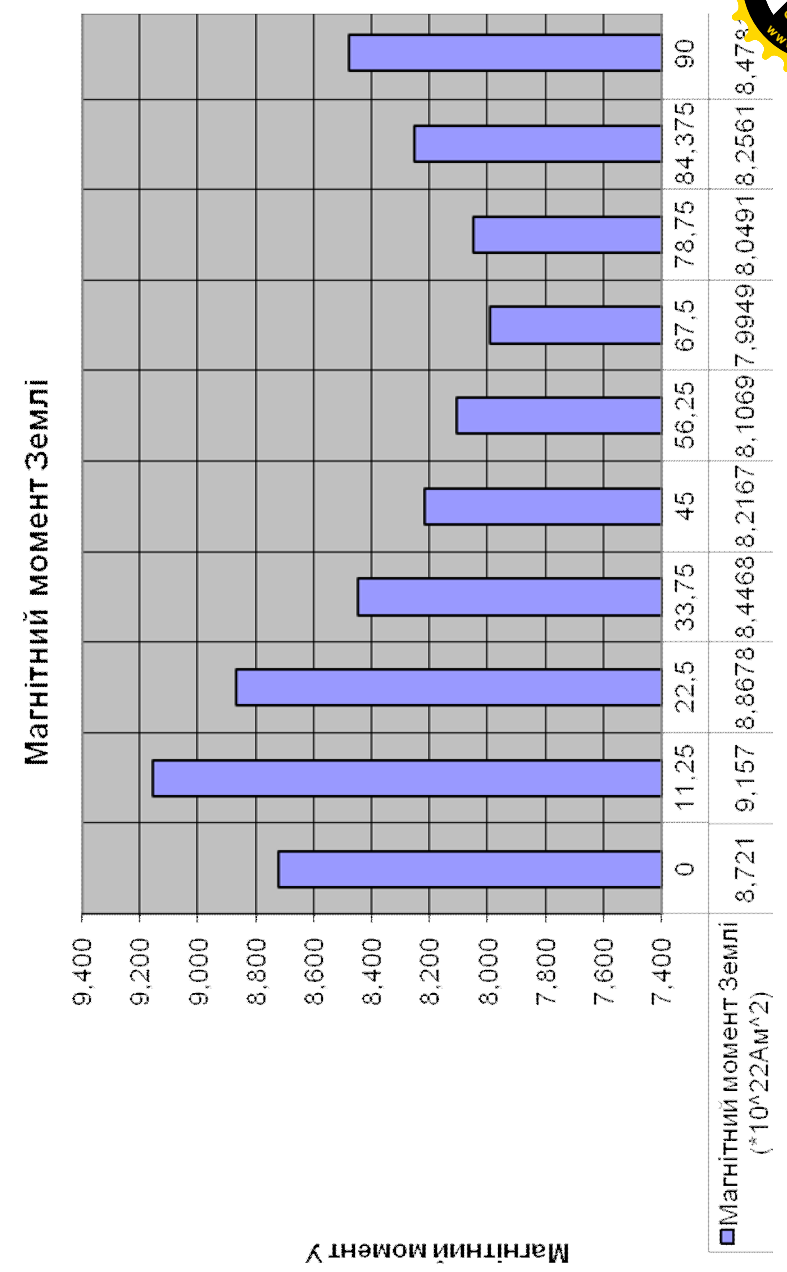
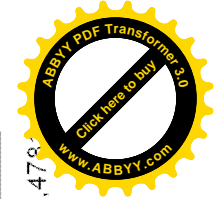
Середня квадратична похибка коефіцієнта d
md= 0,113483432

Середні квадратичні похибки зрівноваженої функції

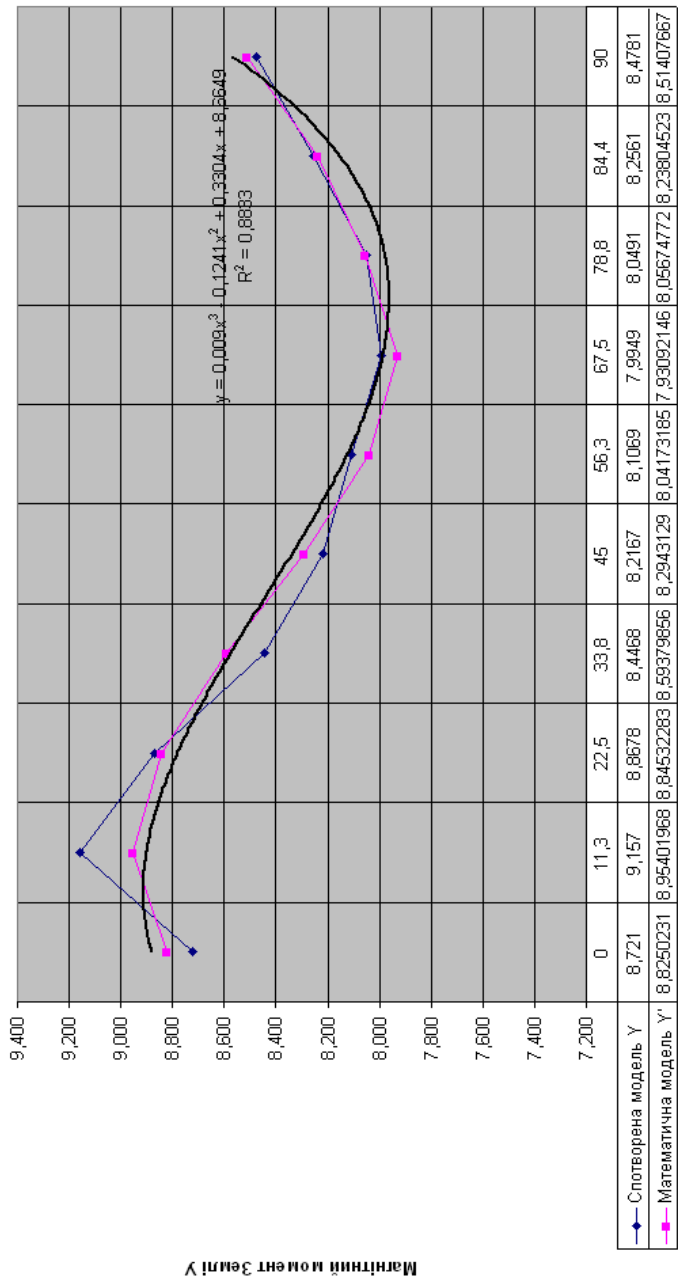
mφ=

0,11348343
0,07018397
0,07458509
0,0685238
0,061908
0,06840348
0,07279229
0,06204478
0,06653025
0,09944585

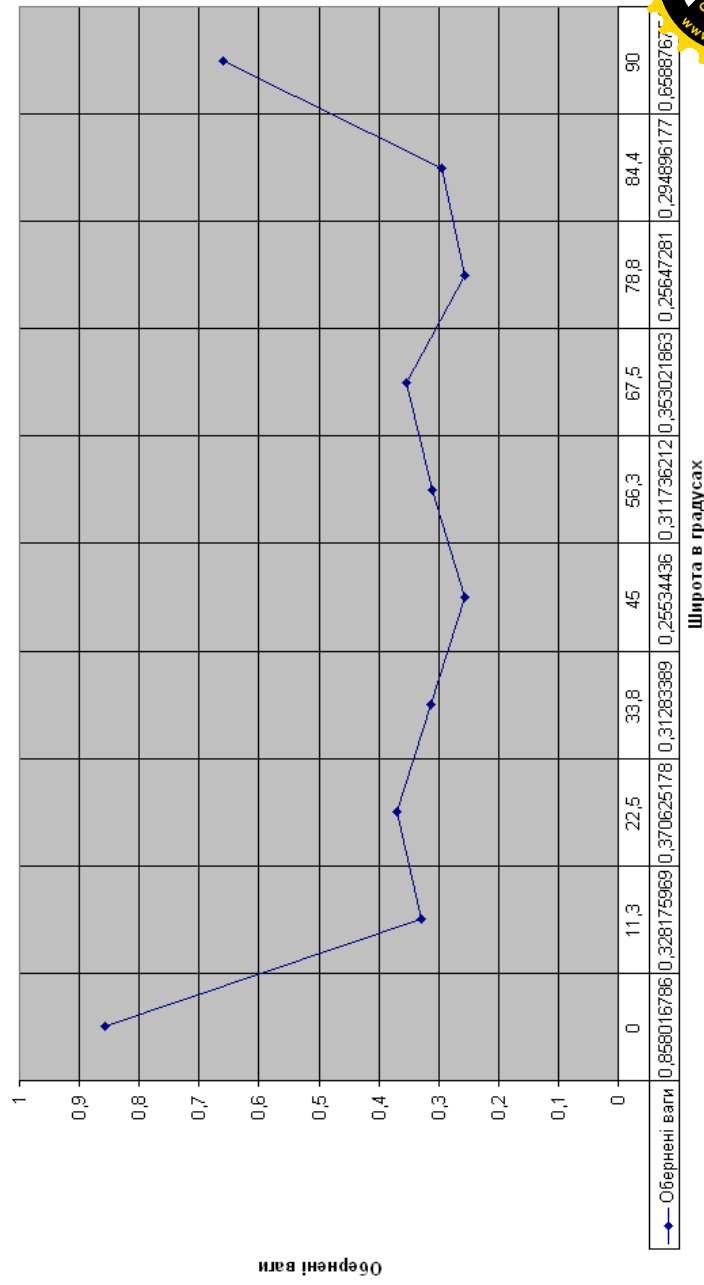
Додаток 10. Діаграми досліджень



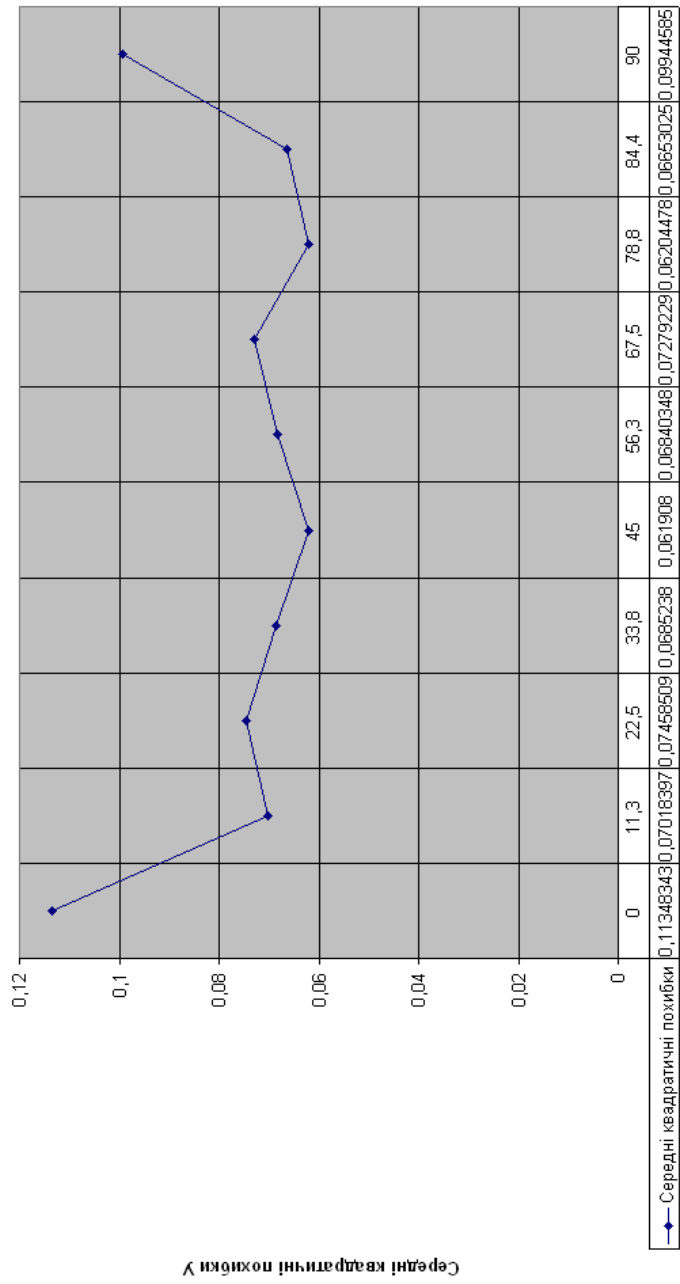
Апроксимация кубичним поліномом



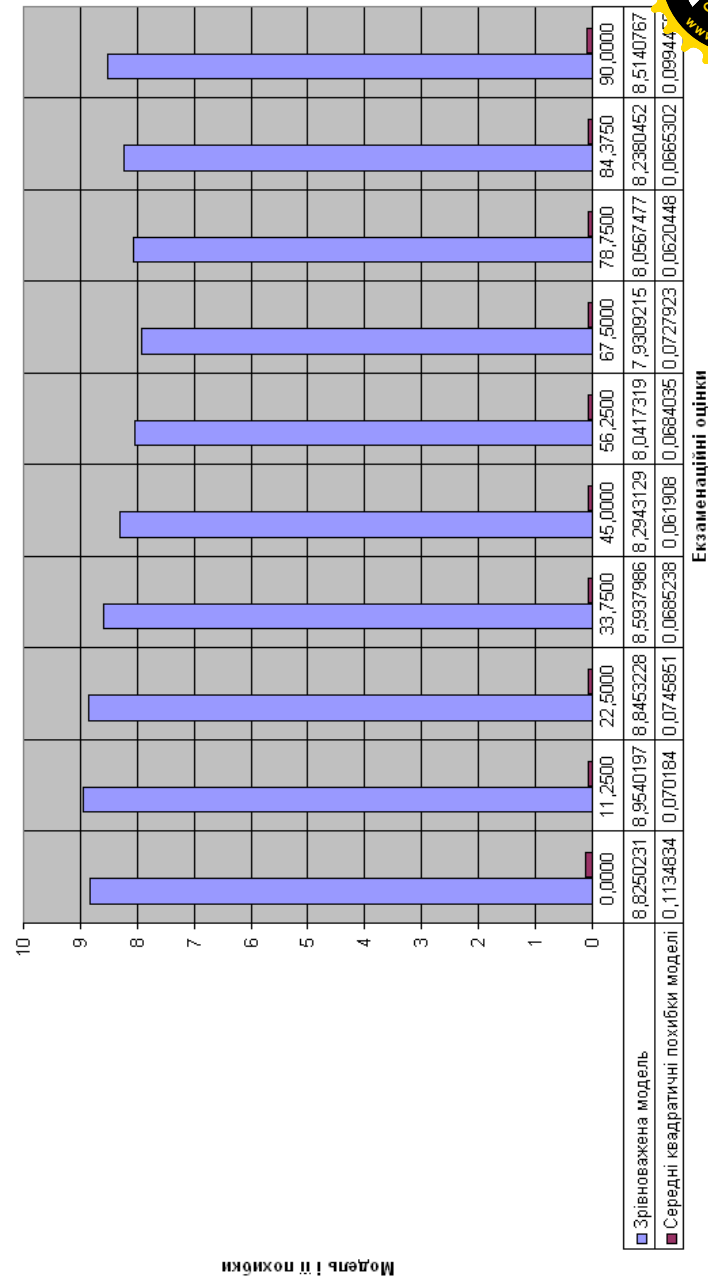
Обернені ваги



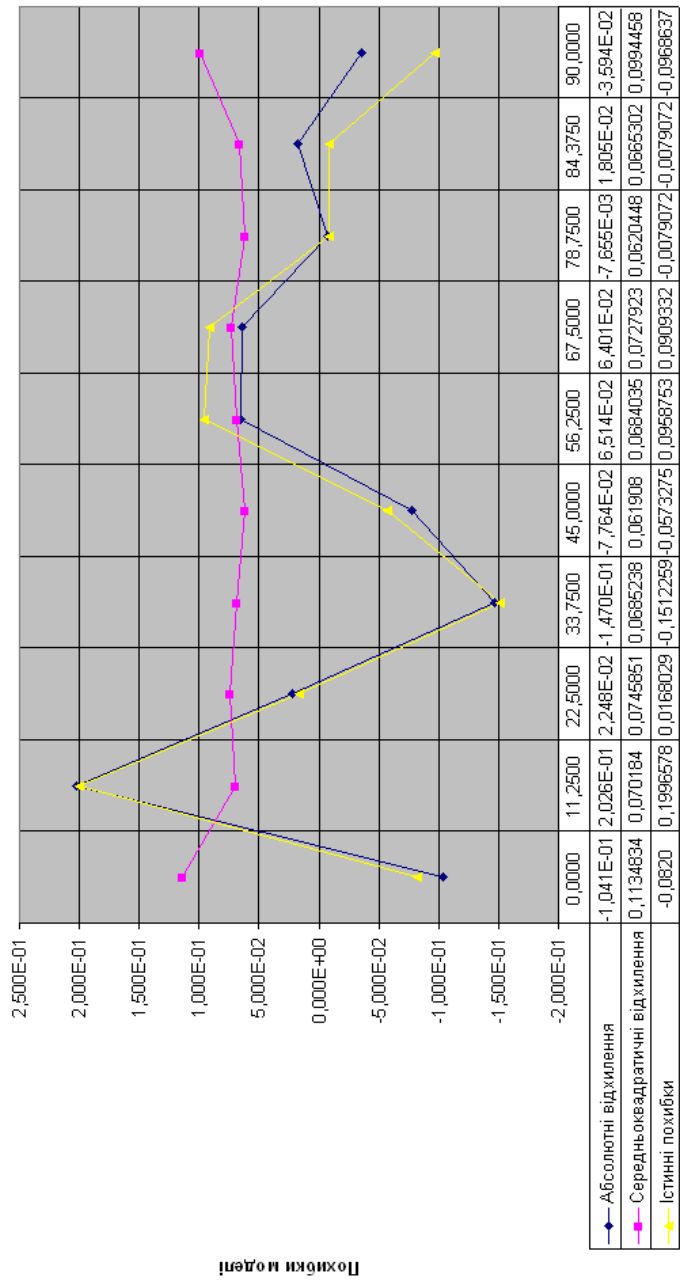
Середні квадратичні похибки



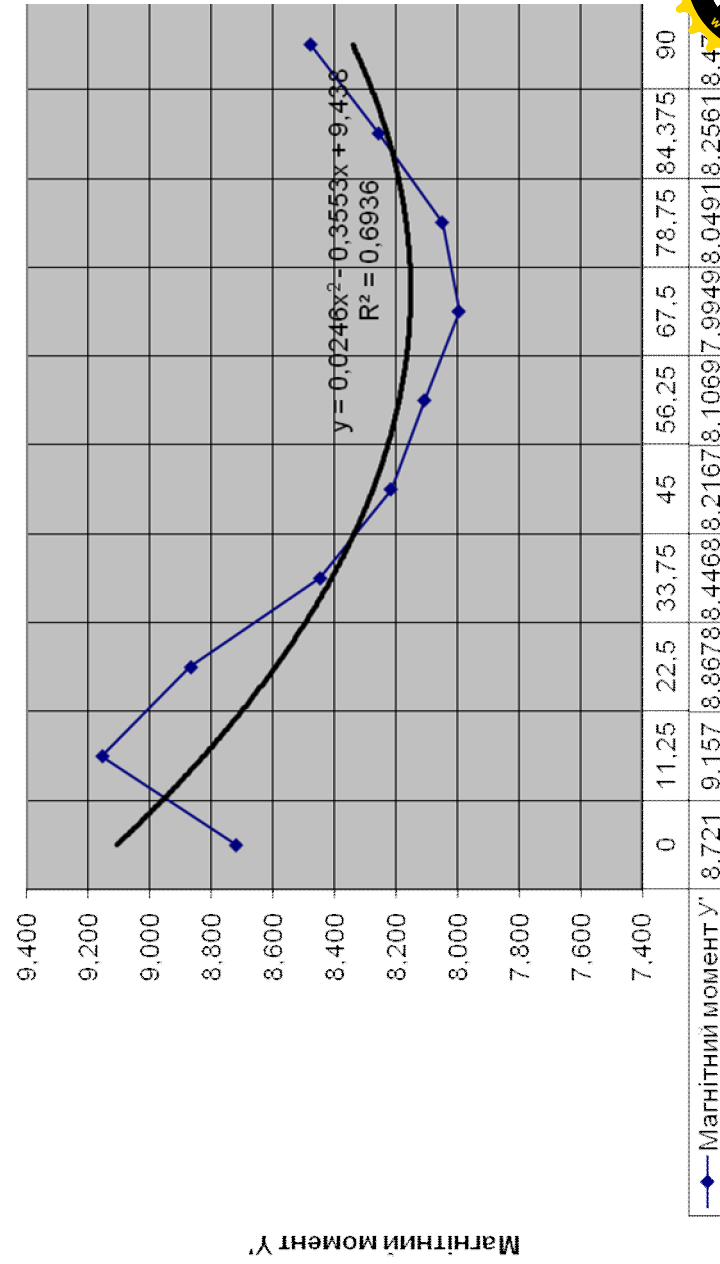
Зрівноважена модель і її похибки



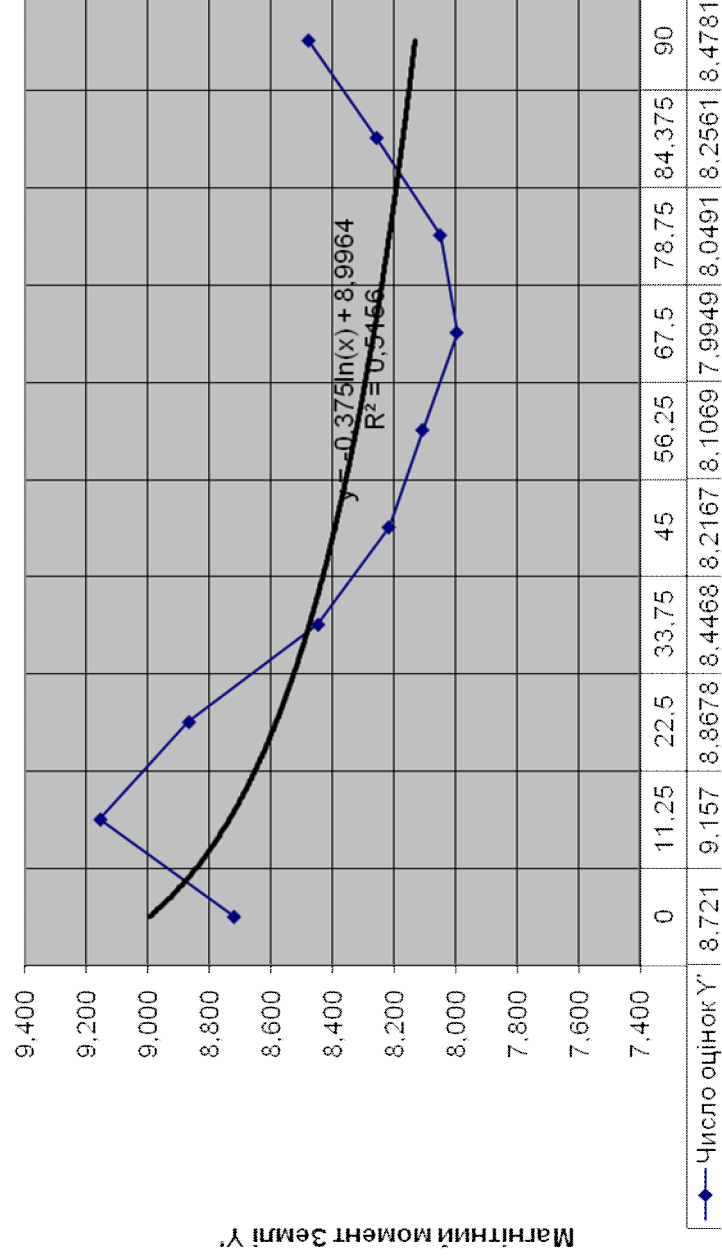
Абсолютні і середньоквадратичні відхилення



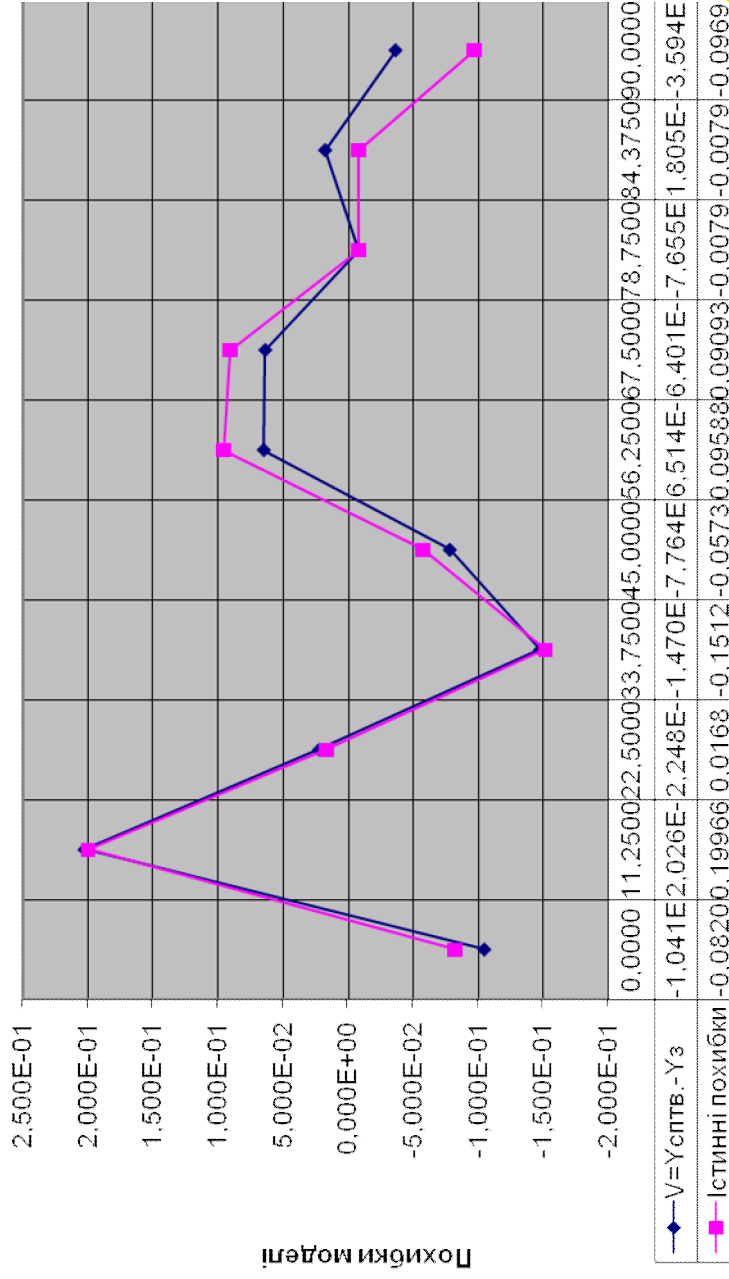
Апроксимація квадратичним поліномом

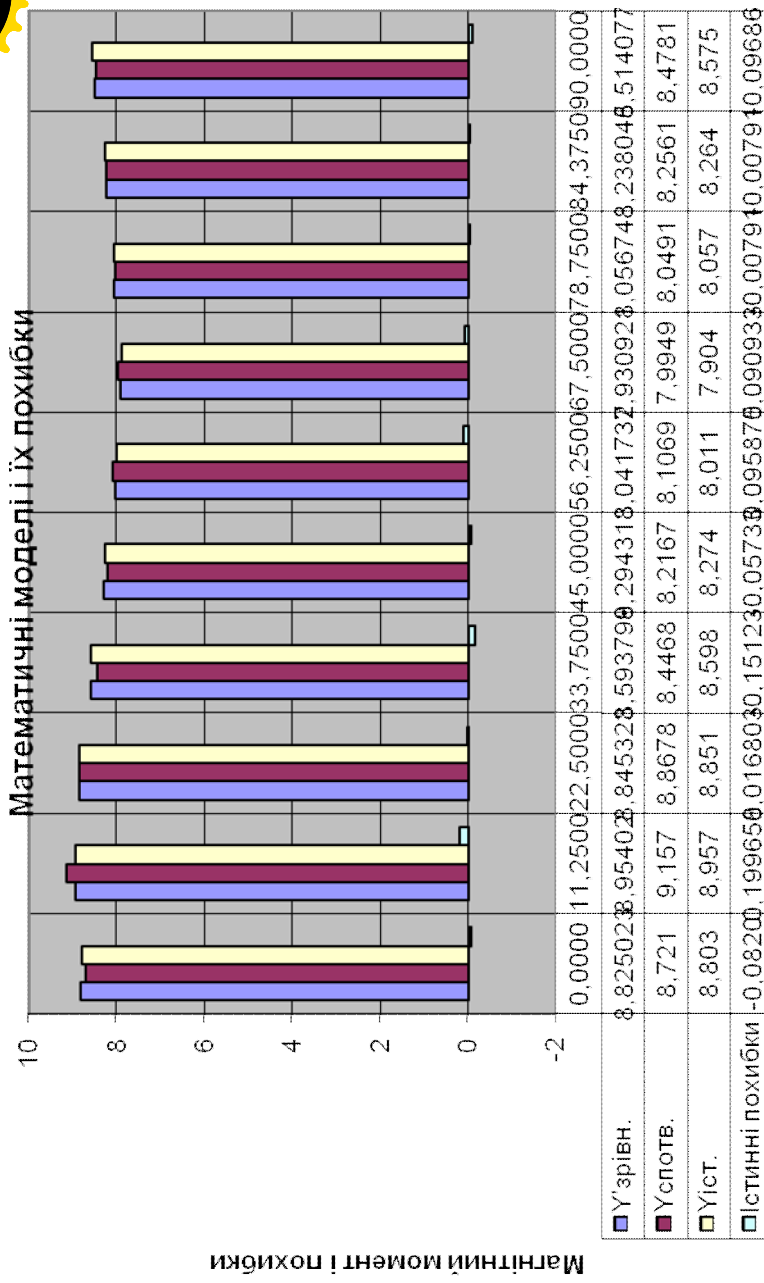
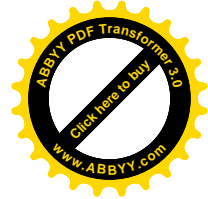
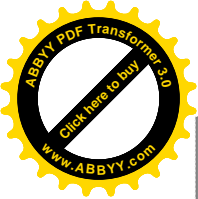


Апроксимация логарифмичною функцією



Істинні і абсолютні похибки





Додаток 11.Таблиці Валецького О.О.

Variant No./ Random values

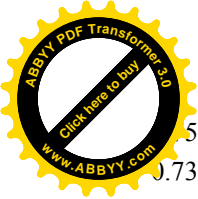
1	0.14	0.15	0.92	0.65	0.35	0.89	0.79	0.32	0.38	0.46	0.26	0.43	0.38	0.32	0.79	0.5
2	0.28	0.84	0.19	0.71	0.69	0.39	0.93	0.75	0.1	0.58	0.2	0.97	0.49	0.44	0.59	0.23
3	0.07	0.81	0.64	0.06	0.28	0.62	0.08	0.99	0.86	0.28	0.03	0.48	0.25	0.34	0.21	0.17
4	0.06	0.79	0.82	0.14	0.8	0.86	0.51	0.32	0.82	0.3	0.66	0.47	0.09	0.38	0.44	0.6
5	0.95	0.5	0.58	0.22	0.31	0.72	0.53	0.59	0.4	0.81	0.28	0.48	0.11	0.17	0.45	0.02
6	0.84	0.1	0.27	0.01	0.93	0.85	0.21	0.1	0.55	0.59	0.64	0.46	0.22	0.94	0.89	0.54
7	0.93	0.03	0.81	0.96	0.44	0.28	0.81	0.09	0.75	0.66	0.59	0.33	0.44	0.61	0.28	0.47
8	0.56	0.48	0.23	0.37	0.86	0.78	0.31	0.65	0.27	0.12	0.01	0.9	0.91	0.45	0.64	0.85
9	0.66	0.92	0.34	0.6	0.34	0.86	0.1	0.45	0.43	0.26	0.64	0.82	0.13	0.39	0.36	0.07
10	0.26	0.02	0.49	0.14	0.12	0.73	0.72	0.45	0.87	0	0.66	0.06	0.31	0.55	0.88	0.17

Variant No./ Random values

17	0.48	0.81	0.52	0.09	0.2	0.96	0.28	0.29	0.25	0.4	0.91	0.71	0.53	0.64	0.36	0.78
18	0.92	0.59	0.03	0.6	0.01	0.13	0.3	0.53	0.05	0.48	0.82	0.04	0.66	0.52	0.13	0.84
19	0.14	0.69	0.51	0.94	0.15	0.11	0.6	0.94	0.33	0.05	0.72	0.7	0.36	0.57	0.59	0.59
20	0.19	0.53	0.09	0.21	0.86	0.11	0.73	0.81	0.93	0.26	0.11	0.79	0.31	0.05	0.11	0.85
21	0.48	0.07	0.44	0.62	0.37	0.99	0.62	0.74	0.95	0.67	0.35	0.18	0.85	0.75	0.27	0.24
22	0.89	0.12	0.27	0.93	0.81	0.83	0.01	0.19	0.49	0.12	0.98	0.33	0.67	0.33	0.62	0.44
23	0.06	0.56	0.64	0.3	0.86	0.02	0.13	0.94	0.94	0.63	0.95	0.22	0.47	0.37	0.19	0.07
24	0.02	0.17	0.98	0.6	0.94	0.37	0.02	0.77	0.05	0.39	0.21	0.71	0.76	0.29	0.31	0.76
25	0.75	0.23	0.84	0.67	0.48	0.18	0.46	0.76	0.69	0.4	0.51	0.32	0	0.05	0.68	0.12
26	0.71	0.45	0.26	0.35	0.6	0.82	0.77	0.85	0.77	0.13	0.42	0.75	0.77	0.89	0.6	0.91

Variant No./ Random values

33	0.73	0.63	0.71	0.78	0.72	0.14	0.68	0.44	0.09	0.01	0.22	0.49	0.53	0.43	0.01	0.46
34	0.54	0.95	0.85	0.37	0.1	0.5	0.79	0.22	0.79	0.68	0.92	0.58	0.92	0.35	0.42	0.01
35	0.99	0.56	0.11	0.21	0.29	0.02	0.19	0.6	0.86	0.4	0.34	0.41	0.81	0.59	0.81	0.36
36	0.29	0.77	0.47	0.71	0.3	0.99	0.6	0.51	0.87	0.07	0.21	0.13	0.49	0.99	0.99	0.98
37	0.37	0.29	0.78	0.04	0.99	0.51	0.05	0.97	0.31	0.73	0.28	0.16	0.09	0.63	0.18	0.59
38	0.5	0.24	0.45	0.94	0.55	0.34	0.69	0.08	0.3	0.26	0.42	0.52	0.23	0.08	0.25	0.33
39	0.44	0.68	0.5	0.35	0.26	0.19	0.31	0.18	0.81	0.71	0.01	0	0.03	0.13	0.78	0.38



5 0.28 0.86 0.58 0.75 0.33 0.2 0.83 0.81 0.42 0.06 0.17 0.17 0.76 0.69 0.14
 0.73 0.03 0.59 0.82 0.53 0.49 0.04 0.28 0.75 0.54 0.68 0.73 0.11 0.59 0.56 0.28
 0.63 0.88 0.23 0.53 0.78 0.75 0.93 0.75 0.19 0.57 0.78 0.18 0.57 0.78 0.05 0.32

Variant No./ Random values

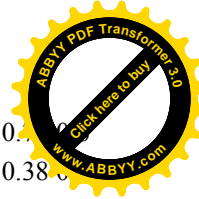
49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64
 0.17 0.12 0.26 0.8 0.66 0.13 0 0.19 0.27 0.87 0.66 0.11 0.19 0.59 0.09 0.21
 0.64 0.2 0.19 0.89 0.38 0.09 0.52 0.57 0.2 0.1 0.65 0.48 0.58 0.63 0.27 0.88
 0.65 0.93 0.61 0.53 0.38 0.18 0.27 0.96 0.82 0.3 0.3 0.19 0.52 0.03 0.53 0.01
 0.85 0.29 0.68 0.99 0.57 0.73 0.62 0.25 0.99 0.41 0.38 0.91 0.24 0.97 0.21 0.77
 0.52 0.83 0.47 0.91 0.31 0.51 0.55 0.74 0.85 0.72 0.42 0.45 0.41 0.5 0.69 0.59
 0.5 0.82 0.95 0.33 0.11 0.68 0.61 0.72 0.78 0.55 0.88 0.9 0.75 0.09 0.83 0.81
 0.75 0.46 0.37 0.46 0.49 0.39 0.31 0.92 0.55 0.06 0.04 0 0.92 0.77 0.01 0.67
 0.11 0.39 0 0.98 0.48 0.82 0.4 0.12 0.85 0.83 0.61 0.6 0.35 0.63 0.7 0.76
 0.6 0.1 0.47 0.1 0.18 0.19 0.42 0.95 0.55 0.96 0.19 0.89 0.46 0.76 0.78 0.37
 0.44 0.94 0.48 0.25 0.53 0.79 0.77 0.47 0.26 0.84 0.71 0.04 0.04 0.75 0.34 0.64

Variant No./ Random values

65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80
 0.62 0.08 0.04 0.66 0.84 0.25 0.9 0.69 0.49 0.12 0.93 0.31 0.36 0.77 0.02 0.89
 0.89 0.15 0.21 0.04 0.75 0.21 0.62 0.05 0.69 0.66 0.02 0.4 0.58 0.03 0.81 0.5
 0.19 0.35 0.11 0.25 0.33 0.82 0.43 0 0.35 0.58 0.76 0.4 0.24 0.74 0.96 0.47
 0.32 0.63 0.91 0.41 0.99 0.27 0.26 0.04 0.26 0.99 0.22 0.79 0.67 0.82 0.35 0.47
 0.81 0.63 0.6 0.09 0.34 0.17 0.21 0.64 0.12 0.19 0.92 0.45 0.86 0.31 0.5 0.3
 0.28 0.61 0.82 0.97 0.45 0.55 0.7 0.67 0.49 0.83 0.85 0.05 0.49 0.45 0.88 0.58
 0.69 0.26 0.99 0.56 0.9 0.92 0.72 0.1 0.79 0.75 0.09 0.3 0.29 0.55 0.32 0.11
 0.65 0.34 0.49 0.87 0.2 0.27 0.55 0.96 0.02 0.36 0.48 0.06 0.65 0.49 0.91 0.19
 0.88 0.18 0.34 0.79 0.77 0.53 0.56 0.63 0.69 0.8 0.74 0.26 0.54 0.25 0.27 0.86
 0.25 0.51 0.81 0.84 0.17 0.57 0.46 0.72 0.89 0.09 0.77 0.77 0.27 0.93 0.8 0

Variant No./ Random values

81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96
 0.81 0.64 0.7 0.6 0.01 0.61 0.45 0.24 0.91 0.92 0.17 0.32 0.17 0.21 0.47 0.72
 0.35 0.01 0.41 0.44 0.19 0.73 0.56 0.85 0.48 0.16 0.13 0.61 0.15 0.73 0.52 0.55
 0.21 0.33 0.47 0.57 0.41 0.84 0.94 0.68 0.43 0.85 0.23 0.32 0.39 0.07 0.39 0.41
 0.43 0.33 0.45 0.47 0.76 0.24 0.16 0.86 0.25 0.18 0.98 0.35 0.69 0.48 0.55 0.62
 0.09 0.92 0.19 0.22 0.21 0.84 0.27 0.25 0.5 0.25 0.42 0.56 0.88 0.76 0.71 0.79



0.04 0.94 0.6 0.16 0.53 0.46 0.68 0.04 0.98 0.86 0.27 0.23 0.27 0.91 0
 0.85 0.78 0.43 0.83 0.82 0.79 0.67 0.97 0.66 0.81 0.45 0.41 0 0.95 0.38
 0.78 0.63 0.6 0.95 0.06 0.8 0.06 0.42 0.25 0.12 0.52 0.05 0.11 0.73 0.92 0.98

0.48 0.96 0.08 0.41 0.28 0.48 0.86 0.26 0.94 0.56 0.04 0.24 0.19 0.65 0.28 0.5

0.22 0.21 0.06 0.61 0.18 0.63 0.06 0.74 0.42 0.78 0.62 0.2 0.39 0.19 0.49 0.45

Variant No./ Random values

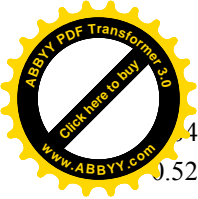
97 98 99 100 101 102 103 104 105 106 107 108 109 110 111 112
 0.04 0.71 0.23 0.71 0.37 0.86 0.96 0.09 0.56 0.36 0.43 0.71 0.91 0.72 0.87 0.46
 0.77 0.64 0.65 0.75 0.73 0.96 0.24 0.13 0.89 0.08 0.65 0.83 0.26 0.45 0.99 0.58
 0.13 0.39 0.04 0.78 0.02 0.75 0.9 0.09 0.94 0.65 0.76 0.4 0.78 0.95 0.12 0.69
 0.46 0.83 0.98 0.35 0.25 0.95 0.7 0.98 0.25 0.82 0.26 0.2 0.52 0.24 0.89 0.4
 0.77 0.26 0.71 0.94 0.78 0.26 0.84 0.82 0.6 0.14 0.76 0.99 0.09 0.02 0.64 0.01
 0.36 0.39 0.44 0.37 0.45 0.53 0.05 0.06 0.82 0.03 0.49 0.62 0.52 0.45 0.17 0.49
 0.39 0.96 0.51 0.43 0.14 0.29 0.8 0.91 0.9 0.65 0.92 0.5 0.93 0.72 0.21 0.69
 0.64 0.61 0.51 0.57 0.09 0.85 0.83 0.87 0.41 0.05 0.97 0.88 0.59 0.59 0.77 0.29
 0.75 0.49 0.89 0.3 0.16 0.17 0.53 0.92 0.84 0.68 0.13 0.82 0.68 0.68 0.38 0.68
 0.94 0.27 0.74 0.15 0.59 0.91 0.85 0.59 0.25 0.24 0.59 0.53 0.95 0.94 0.31 0.04

Variant No./ Random values

113 114 115 116 117 118 119 120 121 122 123 124 125 126 127 128
 0.99 0.72 0.52 0.46 0.8 0.84 0.59 0.87 0.27 0.36 0.44 0.69 0.58 0.48 0.65 0.38
 0.36 0.73 0.62 0.22 0.62 0.6 0.99 0.12 0.46 0.08 0.05 0.12 0.43 0.88 0.43 0.9
 0.45 0.12 0.44 0.13 0.65 0.49 0.76 0.27 0.8 0.79 0.77 0.15 0.69 0.14 0.35 0.99
 0.77 0 0.12 0.96 0.16 0.08 0.94 0.41 0.69 0.48 0.68 0.55 0.58 0.48 0.4 0.63
 0.53 0.42 0.2 0.72 0.22 0.58 0.28 0.48 0.86 0.48 0.15 0.84 0.56 0.02 0.85 0.06
 0.01 0.68 0.42 0.73 0.94 0.52 0.26 0.74 0.67 0.67 0.88 0.95 0.25 0.21 0.38 0.52
 0.25 0.49 0.95 0.46 0.66 0.72 0.78 0.23 0.98 0.64 0.56 0.59 0.61 0.16 0.35 0.48
 0.86 0.23 0.05 0.77 0.45 0.64 0.98 0.03 0.55 0.93 0.63 0.45 0.68 0.17 0.43 0.24
 0.11 0.25 0.15 0.07 0.6 0.69 0.47 0.94 0.51 0.09 0.65 0.96 0.09 0.4 0.25 0.22
 0.88 0.79 0.71 0.08 0.93 0.14 0.56 0.69 0.13 0.68 0.67 0.22 0.87 0.48 0.94 0.05

Variant No./ Random values

129 130 131 132 133 134 135 136 137 138 139 140 141 142 143 144
 0.6 0.1 0.15 0.03 0.3 0.86 0.17 0.92 0.86 0.8 0.92 0.08 0.74 0.76 0.09 0.17
 0.82 0.49 0.38 0.58 0.9 0.09 0.71 0.49 0.09 0.67 0.59 0.85 0.26 0.13 0.65 0.54
 0.97 0.81 0.89 0.31 0.29 0.78 0.48 0.21 0.68 0.29 0.98 0.94 0.87 0.22 0.65 0.88



4 0.85 0.75 0.64 0.01 0.42 0.7 0.47 0.75 0.55 0.13 0.23 0.79 0.64 0.14 0.51
 0.52 0.37 0.46 0.23 0.43 0.64 0.54 0.28 0.58 0.44 0.47 0.95 0.26 0.58 0.67 0.82
 0.1 0.51 0.14 0.13 0.54 0.73 0.57 0.39 0.52 0.31 0.13 0.42 0.71 0.66 0.1 0.21
 0.35 0.96 0.95 0.36 0.23 0.14 0.42 0.95 0.24 0.84 0.93 0.71 0.87 0.11 0.01 0.45
 0.76 0.54 0.03 0.59 0.02 0.79 0.93 0.44 0.03 0.74 0.2 0.07 0.31 0.05 0.78 0.53
 0.9 0.62 0.19 0.83 0.87 0.44 0.78 0.08 0.47 0.84 0.89 0.68 0.33 0.21 0.44 0.57
 0.13 0.86 0.87 0.51 0.94 0.35 0.06 0.43 0.02 0.18 0.45 0.31 0.91 0.04 0.84 0.81

Variant No./ Random values

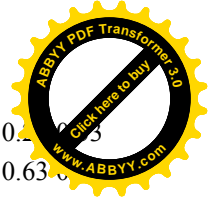
145 146 147 148 149 150 151 152 153 154 155 156 157 158 159 160
 0 0.53 0.7 0.61 0.46 0.8 0.67 0.49 0.19 0.27 0.81 0.91 0.19 0.79 0.39 0.95
 0.2 0.61 0.41 0.96 0.63 0.42 0.87 0.54 0.44 0.06 0.43 0.74 0.51 0.23 0.71 0.81
 0.92 0.17 0.99 0.98 0.39 0.1 0.15 0.91 0.95 0.61 0.81 0.46 0.75 0.14 0.26 0.91
 0.23 0.97 0.48 0.94 0.09 0.07 0.18 0.64 0.94 0.23 0.19 0.61 0.56 0.79 0.45 0.2
 0.8 0.95 0.14 0.65 0.5 0.22 0.52 0.31 0.6 0.38 0.81 0.93 0.01 0.42 0.09 0.37
 0.62 0.13 0.78 0.55 0.95 0.66 0.38 0.93 0.77 0.87 0.08 0.3 0.39 0.06 0.97 0.92
 0.07 0.73 0.46 0.72 0.21 0.82 0.56 0.25 0.99 0.66 0.15 0.01 0.42 0.15 0.03 0.06
 0.8 0.38 0.44 0.77 0.34 0.54 0.92 0.02 0.6 0.54 0.14 0.66 0.59 0.25 0.2 0.14
 0.97 0.44 0.28 0.5 0.73 0.25 0.18 0.66 0.6 0.02 0.13 0.24 0.34 0.08 0.81 0.9
 0.71 0.04 0.86 0.33 0.17 0.34 0.64 0.96 0.51 0.45 0.39 0.05 0.79 0.62 0.68 0.56

Variant No./ Random values

161 162 163 164 165 166 167 168 169 170 171 172 173 174 175 176
 0.1 0.05 0.5 0.81 0.06 0.65 0.87 0.96 0.99 0.81 0.63 0.57 0.47 0.36 0.38 0.4
 0.52 0.57 0.14 0.59 0.1 0.28 0.97 0.06 0.41 0.4 0.11 0.09 0.71 0.2 0.62 0.8
 0.43 0.9 0.39 0.75 0.95 0.15 0.67 0.71 0.57 0.7 0.04 0.2 0.33 0.78 0.69 0.93
 0.6 0.07 0.23 0.05 0.58 0.76 0.31 0.76 0.35 0.94 0.21 0.87 0.31 0.25 0.14 0.71
 0.2 0.53 0.29 0.28 0.19 0.18 0.26 0.18 0.61 0.25 0.86 0.73 0.21 0.57 0.91 0.98
 0.41 0.48 0.48 0.82 0.91 0.64 0.47 0.06 0.09 0.57 0.52 0.7 0.69 0.57 0.22 0.09
 0.17 0.56 0.71 0.16 0.72 0.29 0.1 0.98 0.16 0.9 0.91 0.52 0.8 0.17 0.35 0.06
 0.71 0.27 0.48 0.58 0.32 0.22 0.87 0.18 0.35 0.2 0.93 0.53 0.96 0.57 0.25 0.12
 0.1 0.83 0.57 0.91 0.51 0.36 0.98 0.82 0.09 0.14 0.44 0.21 0 0.67 0.51 0.03
 0.34 0.67 0.11 0.03 0.14 0.12 0.67 0.11 0.13 0.69 0.9 0.86 0.58 0.51 0.63 0.98

Variant No./ Random values

177 178 179 180 181 182 183 184 185 186 187 188 189 190 191 192
 0.31 0.5 0.19 0.7 0.16 0.51 0.51 0.16 0.85 0.17 0.14 0.37 0.65 0.76 0.18 0.35



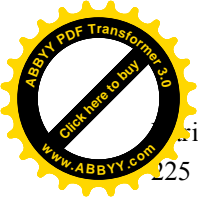
0.15 0.56 0.5 0.88 0.49 0.09 0.98 0.98 0.59 0.98 0.23 0.87 0.34 0.55 0.2
 0.16 0.35 0.5 0.76 0.47 0.91 0.85 0.35 0.89 0.32 0.26 0.18 0.54 0.89 0.63
 0.32 0.93 0.3 0.89 0.85 0.7 0.64 0.2 0.46 0.75 0.25 0.9 0.7 0.91 0.54 0.81
 0.41 0.65 0.49 0.85 0.94 0.61 0.63 0.71 0.8 0.27 0.09 0.81 0.99 0.43 0.09 0.92
 0.44 0.88 0.95 0.75 0.71 0.28 0.28 0.9 0.59 0.23 0.23 0.32 0.6 0.97 0.29 0.97
 0.12 0.08 0.44 0.33 0.57 0.32 0.65 0.48 0.93 0.82 0.39 0.11 0.93 0.25 0.97 0.46
 0.36 0.67 0.3 0.58 0.36 0.04 0.14 0.28 0.13 0.88 0.3 0.32 0.03 0.82 0.49 0.03
 0.75 0.89 0.85 0.24 0.37 0.44 0.17 0.02 0.91 0.32 0.76 0.56 0.18 0.09 0.37 0.73
 0.44 0.4 0.3 0.7 0.74 0.69 0.21 0.12 0.01 0.91 0.3 0.2 0.33 0.03 0.8 0.19

Variant No./ Random values

193 194 195 196 197 198 199 200 201 202 203 204 205 206 207 208
 0.76 0.21 0.1 0.11 0 0.44 0.92 0.93 0.21 0.51 0.6 0.84 0.24 0.44 0.85 0.96
 0.37 0.66 0.98 0.38 0.95 0.22 0.86 0.84 0.78 0.31 0.23 0.55 0.26 0.58 0.21 0.31
 0.44 0.95 0.76 0.85 0.72 0.62 0.43 0.34 0.41 0.89 0.3 0.39 0.68 0.64 0.26 0.24
 0.34 0.1 0.77 0.32 0.26 0.97 0.8 0.28 0.07 0.31 0.89 0.15 0.44 0.11 0.01 0.04
 0.46 0.82 0.32 0.52 0.71 0.62 0.01 0.05 0.26 0.52 0.27 0.21 0.11 0.66 0.03 0.96
 0.66 0.55 0.73 0.09 0.25 0.47 0.11 0.05 0.57 0.85 0.37 0.63 0.46 0.68 0.2 0.65
 0.31 0.09 0.89 0.65 0.26 0.91 0.86 0.2 0.56 0.47 0.69 0.31 0.25 0.7 0.58 0.63
 0.56 0.62 0.01 0.85 0.58 0.1 0.07 0.29 0.36 0.06 0.59 0.87 0.64 0.86 0.11 0.79
 0.1 0.45 0.33 0.48 0.85 0.03 0.46 0.11 0.36 0.57 0.68 0.67 0.53 0.24 0.94 0.41
 0.66 0.8 0.39 0.62 0.65 0.79 0.78 0.77 0.18 0.55 0.6 0.84 0.55 0.29 0.65 0.41

Variant No./ Random values

209 210 211 212 213 214 215 216 217 218 219 220 221 222 223 224
 0.26 0.65 0.4 0.85 0.3 0.61 0.43 0.44 0.43 0.18 0.58 0.67 0.69 0.75 0.14 0.56
 0.61 0.4 0.68 0 0.7 0.02 0.37 0.87 0.76 0.59 0.13 0.44 0.01 0.71 0.27 0.49
 0.47 0.04 0.2 0.56 0.22 0.3 0.53 0.89 0.94 0.56 0.13 0.14 0.07 0.11 0.27 0
 0.04 0.07 0.85 0.47 0.33 0.26 0.99 0.39 0.08 0.14 0.54 0.66 0.46 0.45 0.88 0.07
 0.97 0.27 0.08 0.26 0.68 0.3 0.63 0.43 0.28 0.58 0.78 0.56 0.98 0.3 0.52 0.35
 0.8 0.89 0.33 0.06 0.57 0.57 0.4 0.67 0.95 0.45 0.71 0.63 0.77 0.52 0.54 0.2
 0.21 0.14 0.95 0.57 0.61 0.58 0.14 0 0.25 0.01 0.26 0.22 0.85 0.94 0.13 0.02
 0.16 0.47 0.15 0.5 0.97 0.92 0.59 0.23 0.09 0.9 0.79 0.65 0.47 0.37 0.61 0.25
 0.51 0.76 0.56 0.75 0.13 0.57 0.51 0.78 0.29 0.66 0.64 0.54 0.77 0.91 0.74 0.5
 0.11 0.29 0.96 0.14 0.89 0.03 0.04 0.63 0.99 0.47 0.13 0.29 0.62 0.1 0.73 0.4



Variant No./ Random values

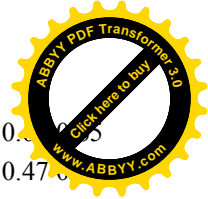
225 226 227 228 229 230 231 232 233 234 235 236 237 238 239 240
 0.43 0.75 0.18 0.95 0.73 0.59 0.61 0.45 0.89 0.01 0.93 0.89 0.71 0.31 0.11 0.79
 0.04 0.29 0.78 0.28 0.56 0.47 0.5 0.32 0.03 0.19 0.86 0.91 0.51 0.4 0.28 0.7
 0.8 0.85 0.99 0.04 0.8 0.1 0.94 0.12 0.14 0.72 0.21 0.31 0.79 0.47 0.64 0.77
 0.72 0.62 0.24 0.14 0.25 0.48 0.54 0.54 0.03 0.32 0.15 0.71 0.85 0.3 0.61 0.42
 0.28 0.81 0.37 0.58 0.5 0.43 0.06 0.33 0.21 0.75 0.18 0.29 0.79 0.86 0.62 0.23
 0.71 0.72 0.15 0.91 0.6 0.77 0.16 0.69 0.25 0.47 0.48 0.73 0.89 0.86 0.65 0.49
 0.49 0.45 0.01 0.14 0.65 0.4 0.62 0.84 0.33 0.66 0.39 0.37 0.9 0.03 0.97 0.69
 0.26 0.56 0.72 0.14 0.63 0.85 0.3 0.67 0.36 0.09 0.65 0.71 0.2 0.91 0.8 0.76
 0.38 0.32 0.71 0.66 0.41 0.62 0.74 0.88 0.88 0 0.78 0.69 0.25 0.6 0.29 0.02
 0.28 0.47 0.21 0.04 0.03 0.17 0.21 0.18 0.6 0.82 0.04 0.19 0 0.04 0.22 0.96

Variant No./ Random values

241 242 243 244 245 246 247 248 249 250 251 252 253 254 255 256
 0.61 0.71 0.19 0.63 0.77 0.92 0.13 0.37 0.57 0.51 0.14 0.95 0.95 0.01 0.56 0.6
 0.49 0.63 0.18 0.62 0.94 0.72 0.65 0.47 0.36 0.42 0.52 0.3 0.81 0.77 0.03 0.67
 0.51 0.59 0.06 0.73 0.5 0.23 0.5 0.72 0.83 0.54 0.05 0.67 0.04 0.03 0.86 0.74
 0.35 0.13 0.62 0.22 0.24 0.77 0.15 0.89 0.15 0.04 0.95 0.3 0.98 0.44 0.48 0.93
 0.33 0.09 0.63 0.4 0.87 0.8 0.76 0.93 0.25 0.99 0.39 0.78 0.05 0.41 0.93 0.41
 0.44 0.73 0.77 0.44 0.18 0.42 0.63 0.12 0.98 0.6 0.8 0.99 0.88 0.86 0.87 0.41
 0.32 0.6 0.47 0.21 0.56 0.95 0.16 0.23 0.96 0.58 0.64 0.57 0.3 0.21 0.63 0.15
 0.98 0.19 0.31 0.95 0.16 0.73 0.53 0.81 0.29 0.74 0.16 0.77 0.29 0.47 0.86 0.72
 0.42 0.29 0.24 0.65 0.43 0.66 0.8 0.09 0.8 0.67 0.69 0.28 0.23 0.82 0.8 0.68
 0.99 0.64 0 0.48 0.24 0.35 0.4 0.37 0.01 0.41 0.63 0.14 0.96 0.58 0.97 0.94

Variant No./ Random values

257 258 259 260 261 262 263 264 265 266 267 268 269 270 271 272
 0.09 0.24 0.32 0.37 0.89 0.69 0.07 0.06 0.97 0.79 0.42 0.23 0.62 0.5 0.82 0.21
 0.68 0.89 0.57 0.38 0.37 0.98 0.62 0.3 0.01 0.59 0.37 0.76 0.47 0.16 0.51 0.22
 0.89 0.35 0.78 0.6 0.15 0.88 0.16 0.17 0.55 0.78 0.29 0.73 0.52 0.33 0.44 0.6
 0.42 0.81 0.51 0.26 0.27 0.2 0.37 0.34 0.31 0.46 0.53 0.19 0.77 0.77 0.41 0.6
 0.31 0.99 0.06 0.65 0.54 0.18 0.76 0.39 0.79 0.29 0.33 0.44 0.19 0.52 0.15 0.41
 0.34 0.18 0.99 0.48 0.54 0.44 0.73 0.45 0.67 0.38 0.31 0.62 0.49 0.93 0.41 0.91
 0.31 0.81 0.48 0.09 0.27 0.77 0.71 0.03 0.86 0.38 0.77 0.34 0.31 0.77 0.2 0.75
 0.45 0.65 0.45 0.32 0.2 0.77 0.7 0.92 0.12 0.01 0.9 0.51 0.66 0.09 0.62 0.8



0.49 0.09 0.26 0.36 0.01 0.97 0.59 0.88 0.28 0.16 0.13 0.32 0.31 0.66 0.0
 0.28 0.61 0.93 0.26 0.68 0.63 0.36 0.06 0.27 0.35 0.67 0.63 0.03 0.54 0.47

Variant No./ Random values

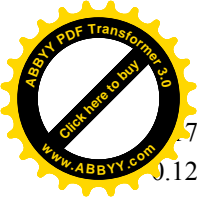
273 274 275 276 277 278 279 280 281 282 283 284 285 286 287 288
 0.28 0.03 0.5 0.45 0.07 0.77 0.23 0.55 0.47 0.1 0.58 0.59 0.54 0.87 0.02 0.79
 0.08 0.14 0.35 0.62 0.4 0.14 0.51 0.71 0.8 0.62 0.46 0.43 0.62 0.67 0.94 0.56
 0.12 0.75 0.31 0.81 0.34 0.07 0.83 0.3 0.33 0.62 0.54 0.23 0.27 0.83 0.94 0.49
 0.75 0.38 0.24 0.37 0.2 0.58 0.35 0.31 0.14 0.77 0.11 0.99 0.26 0.06 0.38 0.13
 0.34 0.67 0.76 0.87 0.96 0.95 0.97 0.03 0.09 0.83 0.39 0.13 0.07 0.71 0.09 0.87
 0.04 0.08 0.59 0.13 0.37 0.46 0.41 0.44 0.28 0.22 0.77 0.26 0.34 0.65 0.94 0.7
 0.47 0.45 0.87 0.84 0.77 0.87 0.2 0.19 0.27 0.71 0.52 0.8 0.73 0.17 0.67 0.9
 0.77 0.07 0.15 0.72 0.13 0.44 0.47 0.3 0.6 0.57 0 0.73 0.34 0.92 0.43 0.69
 0.31 0.13 0.83 0.5 0.49 0.31 0.63 0.12 0.84 0.04 0.25 0.12 0.19 0.25 0.65 0.17
 0.98 0.06 0.94 0.11 0.35 0.28 0.01 0.31 0.47 0.01 0.3 0.47 0.81 0.64 0.37 0.88

Variant No./ Random values

289 290 291 292 293 294 295 296 297 298 299 300 301 302 303 304
 0.51 0.85 0.29 0.09 0.28 0.54 0.52 0.01 0.16 0.58 0.39 0.34 0.19 0.65 0.62 0.13
 0.49 0.14 0.34 0.15 0.95 0.62 0.58 0.65 0.86 0.55 0.7 0.55 0.26 0.9 0.49 0.65
 0.2 0.98 0.58 0.03 0.38 0.5 0.72 0.24 0.26 0.48 0.29 0.39 0.72 0.85 0.84 0.78
 0.31 0.63 0.05 0.77 0.77 0.56 0.06 0.88 0.87 0.64 0.46 0.24 0.82 0.46 0.85 0.79
 0.26 0.03 0.95 0.35 0.27 0.73 0.48 0.03 0.04 0.8 0.29 0 0.58 0.76 0.07 0.58
 0.25 0.1 0.47 0.47 0.09 0.16 0.43 0.96 0.13 0.62 0.67 0.6 0.44 0.92 0.56 0.27
 0.42 0.04 0.2 0.83 0.2 0.85 0.66 0.11 0.9 0.62 0.54 0.54 0.33 0.72 0.13 0.15
 0.35 0.95 0.84 0.5 0.68 0.77 0.24 0.6 0.29 0.01 0.61 0.87 0.66 0.79 0.52 0.4
 0.61 0.63 0.42 0.52 0.25 0.77 0.19 0.54 0.29 0.16 0.29 0.91 0.93 0.06 0.45 0.53
 0.77 0.99 0.14 0.03 0.73 0.4 0.43 0.28 0.75 0.26 0.28 0.88 0.96 0.39 0.95 0.87

Variant No./ Random values

305 306 307 308 309 310 311 312 313 314 315 316 317 318 319 320
 0.94 0.75 0.72 0.91 0.74 0.64 0.26 0.35 0.74 0.55 0.25 0.4 0.79 0.09 0.14 0.51
 0.35 0.71 0.11 0.36 0.94 0.1 0.91 0.19 0.39 0.32 0.51 0.91 0.07 0.6 0.2 0.82
 0.52 0.02 0.61 0.87 0.98 0.53 0.18 0.87 0.7 0.58 0.42 0.97 0.25 0.91 0.67 0.78
 0.13 0.14 0.96 0.99 0 0.9 0.19 0.21 0.16 0.97 0.17 0.37 0.27 0.84 0.76 0.84
 0.72 0.68 0.6 0.84 0.9 0.03 0.37 0.7 0.24 0.24 0.29 0.16 0.51 0.3 0.05 0
 0.51 0.68 0.32 0.33 0.64 0.35 0.03 0.89 0.51 0.7 0.29 0.89 0.39 0.22 0.33 0.45



0.7 0.22 0.01 0.38 0.12 0.8 0.69 0.65 0.01 0.17 0.84 0.4 0.87 0.45 0.19 0.6
 0.12 0.12 0.28 0.59 0.93 0.71 0.62 0.31 0.3 0.17 0.11 0.44 0.48 0.46 0.4 0.9
 0.38 0.9 0.64 0.49 0.54 0.44 0 0.61 0.98 0.69 0.07 0.54 0.85 0.16 0.02 0.63
 0.27 0.5 0.52 0.98 0.34 0.91 0.87 0.4 0.78 0.66 0.8 0.88 0.18 0.33 0.85 0.1

Variant No./ Random values

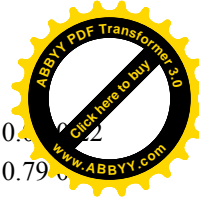
321 322 323 324 325 326 327 328 329 330 331 332 333 334 335 336
 0.22 0.83 0.34 0.5 0.85 0.04 0.86 0.08 0.25 0.03 0.93 0.02 0.13 0.32 0.19 0.71
 0.55 0.18 0.43 0.06 0.35 0.45 0.5 0.07 0.66 0.82 0.82 0.94 0.93 0.04 0.13 0.77
 0.65 0.52 0.79 0.39 0.75 0.17 0.54 0.61 0.39 0.53 0.98 0.46 0.83 0.39 0.36 0.38
 0.3 0.47 0.46 0.11 0.99 0.66 0.53 0.85 0.81 0.53 0.84 0.2 0.56 0.85 0.33 0.86
 0.21 0.86 0.72 0.52 0.33 0.4 0.28 0.3 0.87 0.11 0.23 0.28 0.27 0.89 0.21 0.25
 0.07 0.71 0.26 0.29 0.46 0.32 0.29 0.56 0.39 0.89 0.89 0.89 0.35 0.82 0.11 0.67
 0.45 0.62 0.7 0.1 0.21 0.83 0.56 0.46 0.22 0.01 0.34 0.96 0.71 0.51 0.88 0.19
 0.09 0.73 0.03 0.81 0.19 0.8 0.04 0.97 0.34 0.07 0.23 0.96 0.1 0.36 0.85 0.4
 0.66 0.43 0.19 0.39 0.5 0.97 0.9 0.19 0.06 0.99 0.63 0.95 0.52 0.45 0.3 0.05
 0.45 0.05 0.8 0.68 0.55 0.01 0.95 0.67 0.3 0.22 0.92 0.19 0.13 0.93 0.39 0.18

Variant No./ Random values

337 338 339 340 341 342 343 344 345 346 347 348 349 350 351 352
 0.56 0.8 0.34 0.49 0.03 0.98 0.2 0.59 0.55 0.1 0.02 0.26 0.35 0.35 0.36 0.19
 0.2 0.41 0.99 0.47 0.45 0.53 0.85 0.93 0.81 0.02 0.34 0.39 0.55 0.44 0.95 0.97
 0.78 0.37 0.79 0.02 0.37 0.42 0.16 0.17 0.27 0.11 0.17 0.23 0.64 0.34 0.35 0.43
 0.94 0.78 0.22 0.18 0.18 0.52 0.86 0.24 0.08 0.51 0.4 0.06 0.66 0.04 0.43 0.32
 0.58 0.88 0.56 0.98 0.67 0.05 0.43 0.15 0.47 0.06 0.96 0.57 0.47 0.45 0.85 0.5
 0.33 0.23 0.23 0.34 0.21 0.07 0.3 0.15 0.45 0.94 0.05 0.16 0.55 0.37 0.9 0.68
 0.66 0.27 0.33 0.37 0.99 0.58 0.51 0.15 0.62 0.57 0.84 0.32 0.29 0.88 0.27 0.37
 0.23 0.19 0.89 0.87 0.57 0.14 0.15 0.95 0.78 0.11 0.19 0.63 0.58 0.33 0 0.59
 0.4 0.87 0.3 0.68 0.12 0.16 0.02 0.87 0.64 0.96 0.28 0.67 0.44 0.6 0.47 0.74
 0.64 0.91 0.59 0.95 0.05 0.49 0.73 0.74 0.25 0.62 0.69 0.01 0.04 0.9 0.37 0.78

Variant No./ Random values

353 354 355 356 357 358 359 360 361 362 363 364 365 366 367 368
 0.19 0.86 0.83 0.59 0.38 0.14 0.65 0.74 0.12 0.68 0.04 0.92 0.56 0.48 0.79 0.85
 0.56 0.14 0.53 0.72 0.34 0.78 0.67 0.33 0.03 0.9 0.46 0.88 0.38 0.34 0.36 0.34
 0.65 0.53 0.79 0.49 0.86 0.41 0.92 0.7 0.56 0.38 0.72 0.93 0.17 0.48 0.72 0.33
 0.2 0.83 0.76 0.01 0.12 0.3 0.29 0.91 0.13 0.67 0.93 0.86 0.27 0.08 0.94 0.38



0.79 0.93 0.62 0.01 0.62 0.95 0.15 0.41 0.33 0.71 0.42 0.48 0.92 0.83 0.0
 0.01 0.26 0.9 0.14 0.75 0.46 0.68 0.47 0.65 0.35 0.76 0.16 0.47 0.73 0.79
 0.75 0.2 0.04 0.9 0.75 0.71 0.55 0.52 0.78 0.19 0.65 0.36 0.21 0.32 0.39 0.26
 0.4 0.61 0.6 0.13 0.63 0.58 0.15 0.59 0.07 0.42 0.2 0.2 0.2 0.31 0.87 0.27
 0.76 0.05 0.27 0.72 0.19 0 0.55 0.61 0.48 0.42 0.55 0.51 0.87 0.92 0.53 0.03
 0.43 0.51 0.39 0.84 0.42 0.53 0.22 0.34 0.15 0.76 0.23 0.36 0.1 0.64 0.25 0.06

Variant No./ Random values

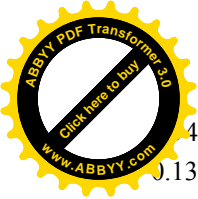
369 370 371 372 373 374 375 376 377 378 379 380 381 382 383 384
 0.39 0.04 0.97 0.5 0.08 0.65 0.62 0.71 0.09 0.53 0.59 0.19 0.46 0.58 0.97 0.51
 0.41 0.31 0.03 0.48 0.22 0.76 0.93 0.06 0.24 0.74 0.35 0.36 0.32 0.56 0.91 0.6
 0.78 0.15 0.47 0.81 0.81 0.15 0.28 0.43 0.66 0.79 0.57 0.06 0.11 0.08 0.61 0.53
 0.31 0.5 0.44 0.52 0.12 0.74 0.73 0.92 0.45 0.44 0.94 0.54 0.23 0.68 0.28 0.86
 0.06 0.13 0.4 0.84 0.14 0.86 0.37 0.76 0.7 0.09 0.61 0.2 0.71 0.51 0.24 0.91
 0.4 0.43 0.02 0.72 0.53 0.86 0.07 0.64 0.82 0.36 0.34 0.14 0.33 0.46 0.23 0.51
 0.89 0.75 0.76 0.64 0.52 0.16 0.41 0.37 0.67 0.96 0.9 0.31 0.49 0.5 0.19 0.1
 0.85 0.75 0.98 0.44 0.23 0.91 0.98 0.62 0.91 0.64 0.21 0.93 0.99 0.49 0.07 0.23
 0.62 0.34 0.64 0.68 0.44 0.11 0.73 0.94 0.03 0.26 0.59 0.18 0.4 0.44 0.37 0.8
 0.51 0.33 0.38 0.94 0.52 0.57 0.42 0.39 0.95 0.08 0.29 0.65 0.91 0.22 0.85 0.08

Variant No./ Random values

385 386 387 388 389 390 391 392 393 394 395 396 397 398 399 400
 0.55 0.58 0.21 0.57 0.25 0.03 0.1 0.71 0.25 0.7 0.12 0.66 0.83 0.02 0.4 0.29
 0.29 0.52 0.52 0.2 0.11 0.87 0.26 0.76 0.75 0.62 0.2 0.41 0.54 0.2 0.51 0.61
 0.84 0.16 0.34 0.84 0.75 0.65 0.16 0.99 0.98 0.11 0.61 0.41 0.01 0 0.29 0.96
 0.07 0.83 0.86 0.9 0.92 0.91 0.6 0.3 0.28 0.84 0 0.26 0.91 0.04 0.14 0.07
 0.92 0.88 0.62 0.15 0.07 0.84 0.24 0.51 0.67 0.09 0.08 0.7 0 0.69 0.92 0.82
 0.12 0.06 0.6 0.41 0.83 0.71 0.8 0.65 0.35 0.56 0.72 0.52 0.53 0.25 0.67 0.53
 0.28 0.61 0.29 0.1 0.42 0.48 0.77 0.61 0.82 0.58 0.29 0.76 0.51 0.57 0.95 0.98
 0.47 0.03 0.56 0.22 0.26 0.29 0.34 0.86 0 0.34 0.15 0.87 0.22 0.98 0.05 0.34
 0.98 0.96 0.5 0.22 0.62 0.91 0.74 0.87 0.88 0.2 0.27 0.34 0.2 0.92 0.22 0.24
 0.53 0.39 0.85 0.62 0.64 0.76 0.69 0.14 0.9 0.55 0.62 0.84 0.25 0.03 0.91 0.27

Variant No./ Random values

401 402 403 404 405 406 407 408 409 410 411 412 413 414 415 416
 0.57 0.71 0.02 0.84 0.02 0.79 0.98 0.06 0.63 0.65 0.82 0.54 0.88 0.92 0.64 0.88
 0.02 0.54 0.56 0.61 0.01 0.72 0.96 0.7 0.26 0.64 0.07 0.65 0.59 0.04 0.29 0.09



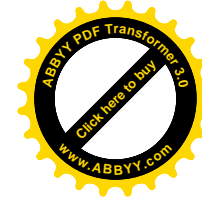
4 0.56 0.81 0.5 0.65 0.26 0.53 0.05 0.37 0.18 0.29 0.41 0.27 0.03 0.36 0.93
 0.13 0.78 0.51 0.78 0.6 0.9 0.4 0.7 0.86 0.67 0.11 0.49 0.65 0.58 0.34 0.34
 0.34 0.76 0.93 0.38 0.57 0.81 0.71 0.13 0.86 0.45 0.58 0.73 0.67 0.81 0.23 0.01
 0.45 0.87 0.68 0.71 0.26 0.6 0.34 0.89 0.13 0.9 0.95 0.62 0 0.99 0.39 0.36
 0.1 0.31 0.02 0.91 0.61 0.61 0.52 0.88 0.13 0.84 0.37 0.9 0.99 0.04 0.23 0.17
 0.47 0.33 0.63 0.94 0.8 0.45 0.75 0.93 0.14 0.93 0.14 0.05 0.29 0.76 0.34 0.75
 0.74 0.81 0.19 0.35 0.67 0.09 0.11 0.01 0.37 0.75 0.17 0.21 0 0.8 0.31 0.55
 0.9 0.24 0.85 0.3 0.9 0.66 0.92 0.03 0.76 0.71 0.92 0.2 0.33 0.22 0.9 0.94

Variant No./ Random values

417 418 419 420 421 422 423 424 425 426 427 428 429 430 431 432
 0.33 0.46 0.76 0.85 0.14 0.22 0.14 0.47 0.73 0.79 0.39 0.37 0.51 0.7 0.34 0.43
 0.66 0.19 0.91 0.04 0.03 0.37 0.51 0.11 0.73 0.54 0.71 0.91 0.85 0.5 0.46 0.44
 0.9 0.26 0.36 0.55 0.12 0.81 0.62 0.28 0.82 0.44 0.62 0.57 0.59 0.16 0.33 0.3
 0.39 0.1 0.72 0.25 0.38 0.37 0.42 0.18 0.21 0.4 0.88 0.35 0.08 0.65 0.73 0.91
 0.77 0.15 0.09 0.68 0.28 0.87 0.47 0.82 0.65 0.69 0.95 0.99 0.57 0.44 0.9 0.66
 0.17 0.58 0.34 0.41 0.37 0.52 0.23 0.97 0.09 0.68 0.34 0.08 0 0.53 0.55 0.98
 0.49 0.17 0.54 0.17 0.38 0.18 0.83 0.99 0.94 0.46 0.97 0.48 0.67 0.62 0.65 0.51
 0.65 0.82 0.76 0.58 0.48 0.35 0.88 0.45 0.31 0.42 0.77 0.56 0.87 0.9 0.02 0.9
 0.95 0.17 0.02 0.83 0.52 0.97 0.16 0.34 0.45 0.62 0.12 0.96 0.4 0.43 0.52 0.31
 0.17 0.6 0.06 0.65 0.1 0.12 0.41 0.2 0.06 0.59 0.75 0.58 0.51 0.27 0.61 0.78

Variant No./ Random values

433 434 435 436 437 438 439 440 441 442 443 444 445 446 447 448
 0.58 0.38 0.29 0.2 0.41 0.97 0.48 0.44 0.23 0.6 0.8 0.07 0.19 0.3 0.45 0.76
 0.18 0.93 0.23 0.49 0.22 0.92 0.79 0.65 0.01 0.98 0.75 0.18 0.72 0.12 0.72 0.67
 0.5 0.79 0.81 0.25 0.54 0.7 0.95 0.89 0.04 0.55 0.63 0.57 0.92 0.12 0.21 0.03
 0.33 0.46 0.69 0.74 0.99 0.23 0.56 0.3 0.25 0.49 0.47 0.8 0.24 0.9 0.11 0.41
 0.95 0.21 0.23 0.82 0.81 0.53 0.09 0.11 0.4 0.79 0.07 0.38 0.6 0.25 0.15 0.22
 0.74 0.29 0.95 0.81 0.8 0.72 0.47 0.16 0.25 0.91 0.66 0.85 0.45 0.13 0.33 0.12
 0.39 0.48 0.04 0.94 0.7 0.79 0.11 0.91 0.53 0.26 0.73 0.43 0.02 0.82 0.44 0.18
 0.6 0.41 0.42 0.63 0.63 0.95 0.48 0 0.04 0.48 0 0.26 0.7 0.49 0.62 0.48
 0.2 0.17 0.92 0.89 0.64 0.76 0.69 0.75 0.83 0.18 0.32 0.71 0.31 0.42 0.51 0.7
 0.29 0.69 0.23 0.48 0.89 0.62 0.76 0.68 0.44 0.03 0.23 0.26 0.09 0.27 0.52 0.49



Роман Олександрович Берник

**ПОБУДОВА І ДОСЛІДЖЕННЯ
 МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ
 ЗАЛЕЖНОСТІ МАГНІТНОГО МОМЕНТУ
 ЗЕМЛІ ВІД ШИРОТИ МЕТОДОМ
 СТАТИСТИЧНИХ ВИПРОБУВАНЬ МОНТЕ
 КАРЛО**
Апроксимація поліномом третього степеня

Модель ПГБ10-201

Книга написана за матеріалами роботи наукової фізико-математичної школи МЕНУ

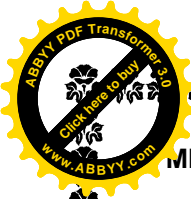
*Науковий керівник – кандидат технічних наук,
 доцент Літнарівич Руслан Миколайович*

*Комп'ютерний набір, верстка – дизайн у
 редакції Microsoft® Office 2003® Word*

Р.О.Берник

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
 МІЖНАРОДНИЙ ЕКОНОМІКО-ГУМАНІТАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
 Ім.акад. С.Дем'янчука**

**Кафедра Математичного моделювання
 33027, м.Рівне, Україна
 вул.акад. С.Дем'янчука, 4, корпус 1
 Телефон: (+00380) 362 23-73-09
 Факс: (+00380) 362 23-01-86
 E-mail: mail@regi.rovno.ua**



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
 МІЖНАРОДНИЙ ЕКОНОМІКО-ГУМАНІТАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
 Ім.акад. С.Дем'янчука

О.І.Гомечко

**ПОБУДОВА І ДОСЛІДЖЕННЯ
 МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ
 ЗАЛЕЖНОСТІ МАГНІТНОГО МОМЕНТУ
 ЗЕМЛІ ВІД ШИРОТИ МЕТОДОМ
 СТАТИСТИЧНИХ ВИПРОБУВАНЬ МОНТЕ
 КАРЛО**

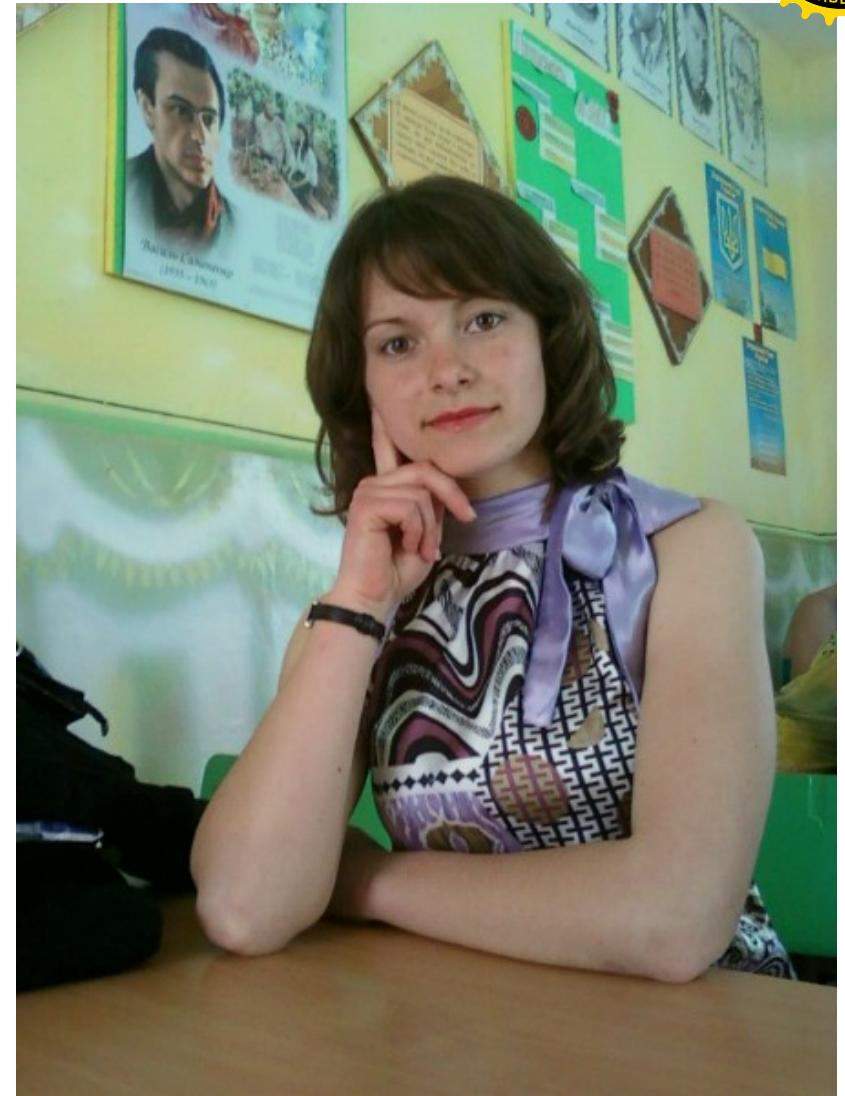
Апроксимація поліномом третього степеня



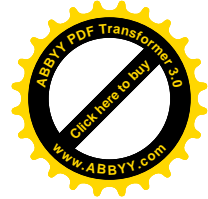
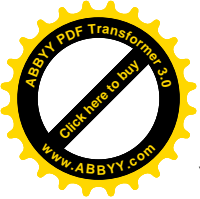
Модель ПГБ-10-204

Науковий керівник:
 кандидат технічних наук,
 доцент Р. М. Літнарівч

Рівне – 2010



Оксана Іванівна Гомечко



УДК 53. 02:550.38

Гомечко О.І. Побудова і дослідження математичної моделі залежності магнітного моменту Землі від широти методом статистичних випробувань Монте Карло. Апроксимація поліномом третього степеня. Модель ПГБ-10-204.МЕГУ, Рівне, 2010, 62 с.

Рецензент: В. Г.Бурачек, доктор технічних наук, професор

Відповідальний за випуск: Й. В. Джунь, доктор фізико-математичних наук, професор

Книга написана за матеріалами роботи наукової фізико-математичної школи МЕГУ

Встановлюється функціональна залежність магнітного моменту планети Земля від геомагнітної широти. Дається вивід формули у вигляді поліному третього порядку.

Математична модель будується на основі способу найменших квадратів.

Проводиться дослідження точності зрівноважених елементів методом статистичних випробувань Монте Карло.

Для студентів і аспірантів напрямку наук про Землю.

Functional dependence of magnetic moment of planet is set Earth from a geomagnetical breadth. The conclusion of formula is given in a kind to the polynomial of the third order.

A mathematical model is built on the basis of method of leastsquares.

Research of exactness of the balanced elements is conducted by the method of statistical tests of Monte Karlo.

For students and graduate students of direction of sciences about Earth.

ЗМІСТ

Передмова.....	5
Розділ 1. Геомагнітний момент Землі.....	6
1.1. Представлення геомагнітного моменту поля Землі.....	6
1.2. Представлення істинної моделі.....	12
Розділ 2. Побудова спотвореної моделі.....	14
2.1. Генерування істинних похибок для дослідження математичної моделі методом статистичних випробувань Монте Карло.....	14
2.2. Представлення спотвореної моделі.....	16
Розділ 3. Зрівноваження моделі.....	17
3.1. Представлення системи нормальних рівнянь.....	17
3.2. Встановлення коефіцієнтів нормальних рівнянь.....	18
3.3. Рішення нормальних рівнянь способом Крамера.....	20
Розділ 4. Оцінка точності.....	26
4.1. Контроль зрівноваження.....	26
4.2. Оцінка точності параметрів, отриманих із системи нормальних рівнянь.....	26
Висновки.....	32
Літературні джерела.....	34
Додатки.....	36

Передмова

Безумовний науковий і практичний інтерес представляє дослідження геомагнітного поля Землі.

Вивченню природи геомагнітного поля і в наш час приділяється велика увага. Вчені намагаються отримати відповіді на запитання: коли і як зародилося магнітне поле земної кулі? Чому воно існує мільярди років? Як це поле буде змінюватись в майбутньому?

В даній роботі ми зробимо спробу виразити один із основних компонентів геомагнітного поля Землі магнітний момент планети графічно і встановити функціональну залежність магнітного моменту від широти.

Нами підбирається емпірична формула у вигляді поліному третього порядку. Математична модель будується на основі способу найменших квадратів. Побудована ймовірніша модель приймається як істинна модель, на основі якої проводяться дослідження точності методом статистичних випробувань Монте Карло. Генеруються псевдо випадкові числа, які приймаються як істинні похибки, якими спотворюється істинна модель.

В подальшому методом найменших квадратів урівноважується спотворена модель і робиться оцінка точності врівноважених елементів. Значення істинних похибок дає можливість зробити порівняльний аналіз. Набирається велика статистика шляхом побудови і дослідження великої кількості моделей.

Розроблена методика дозволить зробити попередній розрахунок точності при проектуванні майбутніх геомагнітних досліджень в будь-якій точці планети Земля.

Розділ 1. Геомагнітний момент Землі

1.1. Представлення геомагнітного моменту поля Землі

Магнітний момент – це векторна величина, яка характеризує земну кулю як джерело магнітного поля. Макроскопічні магнітні моменти створюють замкнуті електричні струми і впорядковано орієнтовані магнітні моменти атомних частинок.

Розрахуємо магнітний момент M Землі на екваторі при $\Phi_{\text{маг. Екв.}} = 0$.

При цьому спочатку розглянемо елементи земного магнетизму.

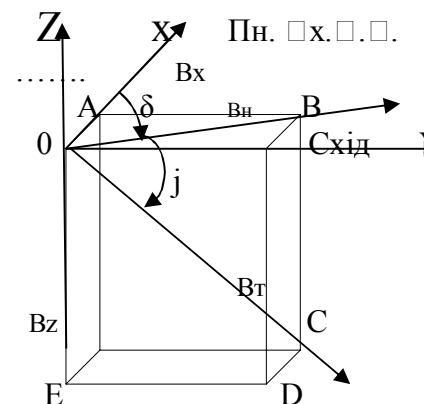


Рис. 1.1. Елементи земного магнетизму

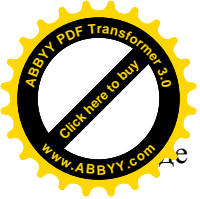
Проекції B_z і B_n індукції дипольного поля, або поля однорідного намагнічування Землі, можна знайти за допомогою формул.

Вертикальна складова геомагнітного поля Землі

$$B_z = \mu_0 \frac{M}{2\pi R^3} \sin \Phi_M \quad (1.1);$$

горизонтальна складова

$$B_n = \mu_0 \frac{M}{4\pi R^3} \cos \Phi_M \quad (1.2)$$



де μ_0 – магнітна стала;

M – магнітний момент земної кулі;

R – радіус Землі;

φ_M – геомагнітна широта, яка відрховується від геомагнітного екватора

Із приведених формул легко знайти модуль вектора індукції поля однорідного намагнічування Земної кулі:

$$\beta_T = \sqrt{B_Z^2 + B_H^2} \quad (1.3).$$

Підставляючи (1.1), (1.2) в (1.3), будемо мати:

$$\beta_T = \sqrt{\mu_0^2 \frac{M^2}{2\pi^2 R^6} \left(\sin^2 \varphi_M + \frac{\cos^2 \varphi_M}{4} \right)};$$

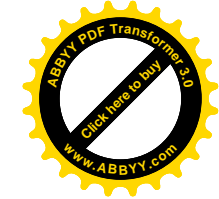
або:

$$\beta_T = \mu \frac{M}{2\pi R^3} \sqrt{\frac{4\sin^2 \varphi_M + \cos^2 \varphi_M}{4}}.$$

Приймаючи до уваги, що $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$, а $4\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 3\sin^2 \varphi + \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi$;

$$\beta_T = \mu \frac{M}{4\pi R^3} \sqrt{3\sin^2 \varphi + 1} \quad (1.4).$$

Знайдемо магнітний момент M із формули (1.4)



$$M = \frac{4\pi R^3 B_T}{\mu \sqrt{3\sin^2 \varphi_M + 1}} \quad (1.5).$$

Напруженість магнітного поля на магнітному екваторі $H_{\text{екв.}} = 0,34$ ерстеда [3, – с. 163].

Для переходу із системи СГСМ у систему СІ складемо слідууючу пропорцію

$$\text{Напруженості } 1 \frac{a}{M} \text{ відповідає } 4\pi \cdot 10^{-3} e, \\ H_{\text{екв.}} \text{ дорівнює } 0,34 e,$$

звідки

$$H_{\text{екв.}} = \frac{1 \frac{a}{M} \cdot 0,34 e}{4\pi \cdot 10^{-3} e} = 27,05634033 \frac{a}{M}.$$

В загальному випадку напруженість магнітного поля Землі можна розрахувати за формулою

$$H = \frac{B_T}{\mu_0} = \frac{M}{4\pi R^3} \sqrt{3\sin^2 \varphi_M + 1} \quad (1.6).$$

Тоді, загальна формула розрахунку магнітного моменту Землі буде

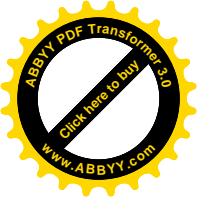
$$M = \frac{4\pi R^3 H}{\sqrt{1 + 3\sin^2 \varphi_M}}. \quad (1.7)$$

Для полюса $H_{\text{пол.}} = 0,66$ ерстед. Тоді, при переході до системи СІ

$$1 \frac{a}{M} \text{ відповідає } 4\pi \cdot 10^{-3} e,$$

$$H_{\text{пол.}} \text{ дорівнює } 0,66 e,$$

звідки



$$H_{\text{пол.}} = \frac{1 \frac{a}{m} \cdot 0,66e}{4\pi \cdot 10^{-3} e} = 52,52113122 \frac{a}{m}$$

Магнітний момент Землі біля полюсів

$$M_{\text{пол.}} = \frac{H_{\text{пол.}} \cdot 4\pi R^3}{\sqrt{1 + 3 \sin^2 90^0}}$$

Взявши радіус земної кулі $R=6371000\text{м}$, а $4\pi R^3=3,249620751 \cdot 10^{21} \text{ м}^3$, магнітний момент земної кулі на екваторі буде

$$M_{\text{екв.}} = \frac{3,249620751 \cdot 10^{21} [\text{м}^3] \cdot 27,05634033 [\frac{a}{m}]}{1} = 8,792284498 \cdot 10^{22} \text{ ам}^2$$

Розрахуємо магнітний момент земної кулі на полюсі

$$M_{\text{пол.}} = \frac{3,249620751 \cdot 10^{21} \cdot 52,52113122}{2} = 8,533687894 \cdot 10^{22} \text{ ам}^2$$

Розрахуємо магнітний момент Землі на широті 45^0 , прийнявши середнє значення напруженості

$$H_{45^0} = \frac{H_0 + H_{90^0}}{2} = \frac{0,34e + 0,66e}{2} = 0,50e$$

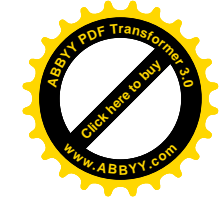
Тоді

$$1 \frac{a}{m} \text{ відповідає } 4\pi \cdot 10^{-3} e$$

$$H_{45^0} \text{ дорівнює } 0,5 e.$$

Звідки

$$H_{45^0} = \frac{1 \frac{a}{m} \cdot 0,5e}{4\pi \cdot 10^{-3} e} = 39,78873577 \frac{a}{m}$$



Таким чином, напруженість магнітного поля H_{45^0} буде

$$H_{45^0} = \frac{3,249620751 \cdot 10^{21} \text{ м}^3 \cdot 39,78873577 \frac{a}{m}}{\sqrt{1 + 3 \sin^2 45^0}}$$

$$H_{45^0} = 8,177542602 \cdot 10^{22} \text{ ам}^2$$

Знайдемо середню напруженість магнітного поля Землі для широти $22,5^0$

$$H_{22,5^0} = \frac{0,34e + 0,5e}{2} = 0,42 e,$$

для $\varphi_{\text{маг.}} = 67,5^0$

$$H_{67,5^0} = \frac{0,5e + 0,6e}{2} = 0,58e$$

для $\varphi_{\text{маг.}} = 22,5^0$

$$1 \frac{a}{m} \text{ відповідає } 4\pi \cdot 10^3 e$$

$$H_{22,5^0} \text{ дорівнює } 0,42 e$$

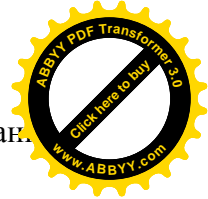
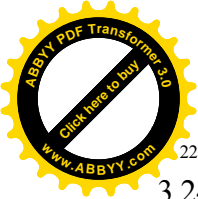
звідки

$$H_{22,5^0} = \frac{1 \frac{a}{m} \cdot 0,42e}{4\pi \cdot 10^3 e} = 33,422538 \frac{a}{m},$$

І по аналогії

$$H_{67,5^0} = \frac{1 \frac{a}{m} \cdot 0,58e}{4\pi \cdot 10^3 e} = 46,1549335 \text{ ам}^2.$$

Магнітні моменти будуть відповідно



$$M_{22,5^0} = \frac{3,249620751 \cdot 10^{21} \cdot 33,42253805}{\sqrt{1 + 3 \sin^2 22,5^0}} = 9,052956514 \cdot 10^{22} \text{ ам}^2,$$

$$M_{67,5^0} = \frac{3,249620751 \cdot 10^{21} \cdot 46,1549335}{\sqrt{1 + 3 \sin^2 67,5^0}} = 7,948506716 \cdot 10^{22} \text{ ам}^2$$

Результати залежності геомагнітного моменту Землі від широти точки спостереження зведено в **Табл 1**.

Таблиця 1. Залежність геомагнітного моменту Землі від широти точки спостереження

№	$\varphi_{\text{маг.}} = X$	$Y = M = f(x) \left(\frac{a}{M}\right)$
1	0,00	$8,79 \cdot 10^{22}$ *
2	11,25	$8,9 \cdot 10^{22}$
3	22,5	$9,05 \cdot 10^{22}$
4	33,75	$8,5 \cdot 10^{22}$
5	45	$8,18 \cdot 10^{22}$
6	56,25	$8 \cdot 10^{22}$
7	67,5	$7,95 \cdot 10^{22}$
8	78,75	$8,12 \cdot 10^{22}$
9	90	$8,53 \cdot 10^{22}$
n=9		$\Sigma = 76,02 \cdot 10^{22}$

Згідно формули (1,7) магнітний момент залежить від напруженості магнітного поля і широти точки спостереження, тобто є функцією двох незалежних змінних, хоча в свою чергу напруженість геомагнітного поля також залежить від широти. На жаль, у нас немає формули залежності напруженості магнітного

поля від широти, що не потребувало б знань про величину магнітного моменту і навпаки.

Тому безперечний інтерес представляє встановлення функціональної залежності магнітного моменту, як головного компонента для визначення складових геомагнітного поля Землі, від геомагнітної широти.

Примітка. В подальшому для спрощення викладок множник 10^{22} писати не будемо, але його слід мати на увазі, особливо при оцінці точності результатів.

1.2. Представлення істинної моделі

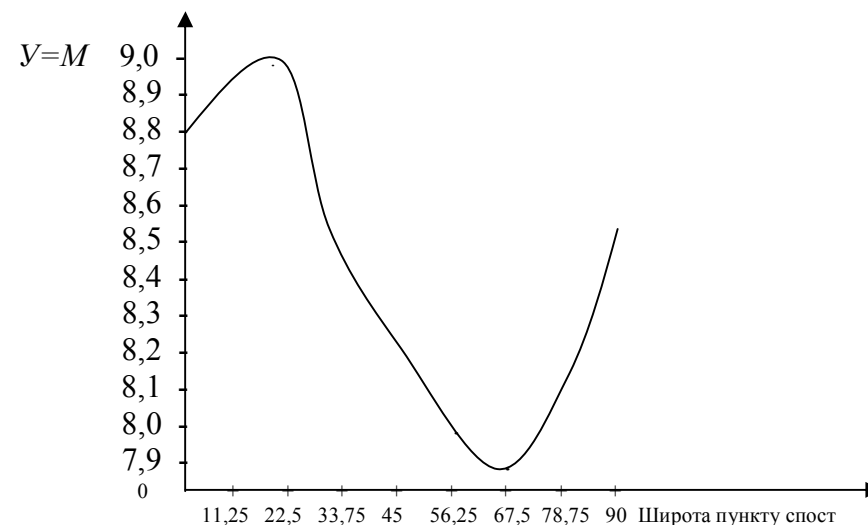
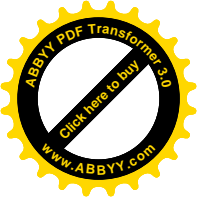


Рис. 1. Графік залежності магнітного моменту земної кулі від геомагнітної широти

Маючи вузлові точки значень геомагнітного моменту Землі в магнітних широтах $0, 22,5^0, 45^0, 67,5^0$ і 90^0 побудуємо точкову діаграму і графік, представлений на рис. 1.

Із цього графіка видно, що екстремум функції буде на широті $22,5^0$ і $67,5^0$. Як видно із графіка, кращою функцією для апроксимації буде кубічний поліном, тобто будемо шукати функціональну залежність у вигляді функції виду



$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (1.2.1)$$

Невідомі коефіцієнти a, b, c, d визначимо по способу найменших квадратів.

Проміжні точки в $11,25^0, 33,75^0, 56,25^0$ і $78,75^0$ визначимо безпосередньо із графіка. Цього нам буде цілком достатньо для побудови експериментальної моделі.

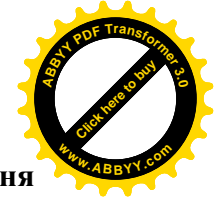
Побудовану таким чином експериментальну модель залежності магнітного моменту земної кулі від широти в подальшому зрівноважили і отримали формулу [7,с.38]

$$Y=M=1.2190*10^{-5} X^3 -1.4404*10^{-3} X^2 +2.8370*10^{-2}X+8,8028(1.2.2)$$

яку прийемо за істинну модель і, генеруючи істинні похибки будемо створювати спотворені моделі, на яких можна дослідити точність визначення магнітного моменту в залежності від похибки визначення широти.

Таблиця 2.Залежність геомагнітного моменту Землі від широти точки спостереження (істинна модель за формулою 1.1)

№	$\varphi_{\text{маг.}} = X$	$Y = M = f(x)\left(\frac{a}{M}\right)$
1	0	8,803
2	11,25	8,957
3	22,5	8,851
4	33,75	8,598
5	45	8,274
6	56,25	8,011
7	67,5	7,904
8	78,75	8,057
9	84,375	8,264
10	90	8,575
n=9	489,375	84,294



Розділ 2. Побудова спотвореної моделі

2.1. Генерування істинних похибок для дослідження математичної моделі методом статистичних випробувань Монте Карло

В роботі [1] істинна модель спотворювалась введенням істинних похибок в незалежні змінні X. В даній монографії істинні похибки будемо вводити в експериментальні параметри Y.

Приведемо методику розрахунку випадкових чисел, які прийемо в подальшому, як істинні похибки для побудови спотвореної моделі.

1. Отримавши ряд випадкових (а точніше псевдо-

$$\text{випадкових) чисел } \xi_{cp}, \quad \xi_{cp} = \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i}{n}, \quad (2.1.1)$$

Де n – сума випадкових чисел.

2. Розраховуються попередні значення істинних похибок Δ'_i за формулою

$$\Delta'_i = \xi_i - \xi_{cp} \quad (2.1.2)$$

3. Знаходять середню квадратичну похибку попередніх істинних похибок за формулою Гауса

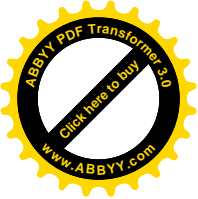
$$m_{\Delta'} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \Delta'^2_i}{n}} \quad (2.1.3)$$

4. Знаходять коефіцієнт пропорційності K, для визначення істинних похибок необхідності точності

$$K = \frac{c}{m'_{\Delta}}, \quad (2.1.4)$$

де c – необхідна константа.

Так, наприклад, при $m'_{\Delta} = 0,28$ і необхідності побудови математичної моделі з точністю $c = 0,1$, будемо мати



$$K_{0,1} = \frac{0,1}{0,28} = 0,357, \text{ а при } c = 0,05, \text{ отримаємо}$$

$$K = \frac{0,05}{0,28} = 0,178.$$

5. Істинні похибки розраховуються за формулою

$$\Delta_i = \Delta'_i \cdot K \quad (2.1.5)$$

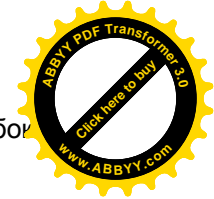
6. Заключним контролем служить розрахунок середньої квадратичної похибки m_{Δ} генерованих істинних похибок Δ

$$m_{\Delta} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \Delta^2}{n}} \quad (2.1.6)$$

і порівняння $m_{\Delta} = c \quad (2.1.7)$

Таблиця 3. Генерування псевдо-випадкових чисел і розрахунок істинних похибок

№	ξ_i	ξ_{cp}	$\Delta'_i = \xi_i - \xi_{cp}$	$\Delta_i'^2$	$\Delta_i = \Delta'_i \cdot K$	Δ_i^2
1	0,84	0,546	0,294	0,08644	0,1153	0,01329703
2	0,55	0,546	0,004	0,00002	0,00157	0,00000246
3	0,39	0,546	-0,156	0,02434	-0,0612	0,00374377
4	0,15	0,546	-0,396	0,15682	-0,1553	0,02412405
5	0,21	0,546	-0,336	0,11290	-0,1318	0,01736755
6	0,63	0,546	0,084	0,00706	0,03295	0,00108547
7	0,31	0,546	-0,236	0,05570	-0,0926	0,00856809
8	0,87	0,546	0,324	0,10498	0,12708	0,01614916
9	0,67	0,546	0,124	0,01538	0,04864	0,00236539
10	0,84	0,546	0,294	0,08644	0,11531	0,01329703
n=10	5,46	5,46	0	0,65004	-1,8E-16	0,10000000



Середня квадратична похибка попередніх істинних похибок

$$\Delta'_o = \sqrt{\frac{0,65004}{10}} = 0,2549588335$$

Коефіцієнт пропорційності $K = \frac{0,1}{0,2549588335} = 0,3922201817$

Середня квадратична похибка при генеруванні випадкових чисел з точністю $c = 0,1$

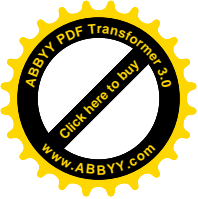
$$m_{\Delta_i} = \sqrt{\frac{0,1000000}{10}} = 0,1$$

2.2. Представлення спотвореної моделі

Таблиця 4. Побудова спотвореної моделі

№	Істинна модель		Δ_i	$Y_{спотв.} = Y_{icm.} + \Delta_i$
	x_{icm}	y_{icm}		
1	0	8,803	0,1153	8,918
2	11,25	8,957	0,00157	8,959
3	22,5	8,851	-0,0612	8,7898
4	33,75	8,598	-0,1553	8,4427
5	45	8,274	-0,1318	8,1422
6	56,25	8,011	0,03295	8,0439
7	67,5	7,904	-0,0926	7,8114
8	78,75	8,057	0,12708	8,1841
9	84,375	8,264	0,04864	8,3126
10	90	8,575	0,11531	8,6903
	489,375	84,294	-1,8E-16	84,294

По даним спотвореної моделі виконують строге зрівноваження методом найменших квадратів і отримують ймовірнішу модель, роблять оцінку точності зрівноважених елементів і дають порівняльний аналіз.



Розділ 3. Зрівноваження моделі

3.1. Представлення системи нормальних рівнянь

У результаті проведеного експерименту ми маємо ряд результатів X_i, V_i , функціональну залежність між якими будемо шукати за допомогою поліному степені K , де коефіцієнти a_i являються невідомими.

Тоді, система нормальних рівнянь буде

$$\begin{aligned} na_0 + a_3[x] + a_2[x^2] + \dots + a_m[x^m] - [y] &= 0, \\ a_0[x] + a_3[x^2] + a_2[x^3] + \dots + a_m[x^{m+1}] - [xy] &= 0, \\ a_0[x^2] + a_1[x^3] + a_2[x^4] + \dots + a_m[x^{m+1}] - [x^2y] &= 0, \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

.....

$$a_0[x^m] + a_1[x^{m+1}] + a_2[x^{m+2}] + \dots + a_m[x^{2m}] - [x^m y] = 0,$$

де знаком [] позначена сума відповідного елемента.

Для поліному третього порядку виду

$$y = ax^3 + vx^2 + cx + d \quad (3.1.2)$$

Система нормальних рівнянь буде

$$\begin{aligned} dn + c[x] + v[x^2] + a[x^3] - [y] &= 0, \\ d[x] + c[x^2] + v[x^3] + a[x^4] - [xy] &= 0, \\ d[x^2] + c[x^3] + v[x^4] + a[x^5] - [x^2y] &= 0, \\ d[x^3] + c[x^4] + v[x^5] + a[x^6] - [x^3y] &= 0. \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

або

$$\begin{aligned} a[x^6] + v[x^5] + c[x^4] + d[x^3] - [x^3y] &= 0, \\ a[x^5] + v[x^4] + c[x^3] + d[x^2] - [x^2y] &= 0, \\ a[x^4] + v[x^3] + c[x^2] + d[x] - [xy] &= 0, \\ a[x^3] + v[x^2] + c[x] + dn - [y] &= 0. \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

В подальшому будемо рішати систему лінійних нормальних рівнянь (3.1.3) або (3.1.4) одним із відомих в математиці способів.

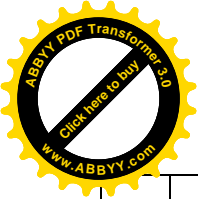


3.2. Встановлення коефіцієнтів нормальних рівнянь

Приведемо розрахункову таблицю, на основі якої стримують коефіцієнти нормальних рівнянь.

Таблиця 5. Розрахунок коефіцієнтів нормальних рівнянь

№	$x_{i\text{снн}}$	$y_{\text{снн}}$	x^0	x^2	x^3	x^4	x^5
1	0	8,918	1	0	0	0	0
2	11,25	8,959	1	126,563	1423,828	16018,066	180203,247
3	22,5	8,7898	1	506,250	11390,625	256289,063	5766503,906
4	33,75	8,4427	1	1139,063	38443,359	1297463,379	43789389,038
5	45	8,1422	1	2025,000	91125,000	4100625,000	184528125,000
6	56,25	8,0439	1	3164,063	177978,516	10011291,504	563135147,095
7	67,5	7,8114	1	4556,250	307546,875	20759414,063	1401260449,219
8	78,75	8,1841	1	6201,563	488373,047	38459377,441	3028675973,511
9	84,375	8,3126	1	7119,141	600677,490	50682163,239	4276307523,251
10	90	8,6903	1	8100,000	729000,000	65610000,000	5904900000,000
Σ	489,375	84,294	10	32937,891	2445958,740	191192641,754	15408543314,266

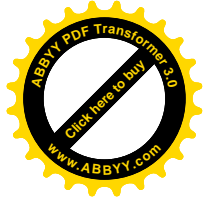


Продовження таблиці 5

№	x^6	xy	x^2y	x^3y
1	0	0	0	0
2	2027286,530	100,7839	1133,819	12755,46233
3	129746337,891	197,770807	4449,843	100121,4711
4	1477891880,035	284,940477	9616,741	324565,0121
5	8303765625,000	366,399631	16487,98	741959,2519
6	31676352024,078	452,47199	25451,55	1431649,657
7	94585080322,266	527,271932	35590,86	2402382,741
8	238508232913,971	644,496248	50754,08	3996883,766
9	360813447274,268	701,378604	59178,82	4993212,912
10	531441000000,000	782,128147	70391,53	6335237,987
Σ	1266937543664,040	4057,642	273055,2	20338768,3

Таким чином, на основі проведених розрахунків нами отримана наступна матриця коефіцієнтів нормальних рівнянь

10,0	489,4	32937,9	2445958,7
489,4	32937,9	2445958,7	191192641,8
32937,9	2445958,7	191192641,8	15408543314,3
2445958,7	191192642	15408543314,3	1266937543664,0



3.3. Рішення системи лінійних рівнянь способом Крамера

Нехай, маємо систему лінійних рівнянь

$$\begin{aligned}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\
 \dots & \\
 a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n.
 \end{aligned}
 \tag{3.3.1}$$

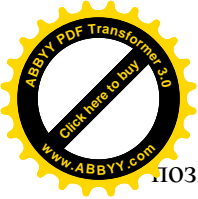
Для того, щоб із цієї системи визначити невідомі s , складемо із коефіцієнтів при невідомих визначник Δ , який називається визначником системи рівнянь (3.3.1).

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}
 \tag{3.3.2}$$

Помножимо ліву і праву частини рівності (3.3.2) на x_i . В лівій частині будемо мати Δx_i , в правій же частині введемо у всі члени i -го стовпчика визначника a_k і множник x_i

$$\Delta \cdot x_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i}x_i \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i}x_i \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni}x_i \dots a_{nn} \end{vmatrix}
 \tag{3.3.3}$$

Потім до i -го стовпчика визначника (3.3.3) додамо всі інші стовпчики, помножені відповідно на x_1, x_2, \dots, x_n . Величина визначника від цього не зміниться. Тоді i -стовпчик представить собою ліву частину системи рівнянь (3.3.1).



Замінімо його вільними членами цієї системи і позначимо через Δ_i

$$\Delta \cdot x_i = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \dots a_{nn} \end{vmatrix} \quad (3.3.4)$$

$$\text{Звідки, } x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \dots a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \dots a_{nn} \end{vmatrix}}. \quad (3.3.5)$$

Формула (3.3.5) дає можливість визначити кожне невідоме системи лінійних рівнянь (3.3.1).

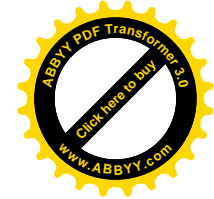
Якщо вільні члени системи лінійних рівнянь рівні нулю, то вона буде системою лінійних однокорінних рівнянь.

Система лінійних одно корінних рівнянь може мати рішення відмінне від нульового, якщо визначник системи Δ рівний нулю.

Для системи чотирьох лінійних рівнянь

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= b_3, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 &= b_4, \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

якщо визначник системи Δ не дорівнює нулю



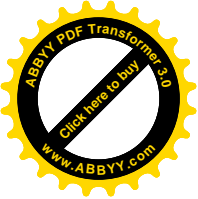
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \neq 0, \quad (3.3.7)$$

то система визначника і по Крамеру її невідомі виражаються формулами

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ b_4 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad (3.3.8)$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & b_4 & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad (3.3.9)$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & b_2 & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & b_3 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & b_4 & a_{44} \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad (3.3.10)$$



$$x_4 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & b_4 \end{vmatrix}}{\Delta} \quad (3.3.11)$$

Як бачимо, що

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ b_4 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad (3.3.12)$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & b_3 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & b_4 & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad (3.3.13)$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & b_2 & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & b_3 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & b_4 & a_{44} \end{vmatrix}, \quad (3.3.14)$$

$$\Delta_{x_4} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & b_4 \end{vmatrix}. \quad (3.3.15)$$



Приведемо формулу знаходження визначника четвертого порядку

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = (a_{23}a_{43} - a_{33}a_{42})(a_{11}a_{24} - a_{14}a_{21}) + \\ + (a_{32}a_{44} - a_{34}a_{42})(a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23}) + (a_{31}a_{43} - a_{33}a_{41})(a_{14}a_{22} - a_{12}a_{24}) + \\ + (a_{31}a_{42} - a_{32}a_{41})(a_{13}a_{24} - a_{14}a_{23}) + (a_{33}a_{44} - a_{34}a_{43})(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) + \\ + (a_{31}a_{44} - a_{34}a_{41})(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}). \quad (3.3.16)$$

І в нашому випадку визначник системи D = 1,38204E+21

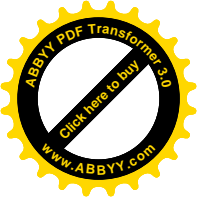
1266937543664,04	15408543314,27	191192642	2445959
15408543314,266	191192642	2445959	32937,891
191192641,754	2445959	32938	489
2445958,740	32938	489	10

20338768,2608	15408543314	191192642	2445959
273055,22385	191192642	2445959	32938
4057,6417360	2445959	32938	489
84,294000000	32938	489	10
D1=	1,51058E+16		

тоді невідомий коефіцієнт a при x³ буде

$$\hat{a} = \tilde{\delta}_1 = \frac{D1}{D} = \frac{1,51058E + 16 + 16}{1.38204E + 21} = 0,000010930$$

1266937543664	20338768,261	191192642	2445959
15408543314	273055,224	2445959	32938
191192642	4057,642	32938	489,375
2445959	84,2940	489,375	10
D2=	-1,6080E+18		



тоді невідомий коефіцієнт b при x^2 буде

$$b = \delta_2 = \frac{D2}{D} = \frac{-1,6080E + 18}{1.38204E + 21} = -0,001164;$$

1266937543664	15408543314	20338768	2445958,7
15408543314	191192642	273055	32937,891
191192642	2445959	4058	489,375
2445959	32938	84,294	10
D3=	1,8681E+19		

і невідомий коефіцієнт c при x буде

$$\tilde{n} = \delta_3 = \frac{D3}{D} = \frac{1,8681E + 19}{1.38204E + 21} = 0,013517;$$

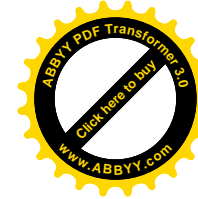
1266937543664	15408543314	191192642	20338768
15408543314	191192642	2445959	273055
191192642	2445959	32938	4058
2445959	32938	489,375	84,294
D4=	1,2337E+22		

коефіцієнт d буде

$$d = \frac{D4}{D} = \frac{1,2337E + 22}{1.38204E + 21} = 8,926795.$$

Таким чином, на основі проведених досліджень, математична модель залежності магнітного моменту планети Земля y_i від широти пункту спостереження x_i виражається формулою

$$\delta' = 0,000010930\delta^3 - 0,001164\delta^2 + 0,013517\delta + 8,926795. \quad (3.3.17)$$



Розділ 4. Оцінка точності

4.1. Контроль зрівноваження

Підставляючи отримані значення коефіцієнтів a, b, c, d у формулу (3.4), отримаємо наступні результати.

Таблиця 6. Коефіцієнти нормальних рівнянь і контроль зрівноваження

	x^3	x^2	x	x^0	y	Контроль
x^3	1266937543664,04	15408543314,27	191192642	2445959	20159950,76	20159950,76
x^2	15408543314,266	191192642	2445959	32937,891	271352,096	271352,096
x	191192641,754	2445959	32938	489	4046,543	4046,543
x^0	2445958,740	32938	489	10	84,294	84,294
	0,000010930	-0,001164	0,013517	8,926795		
	Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.	b	c	d		

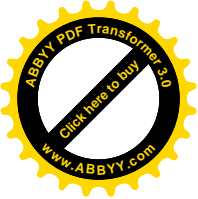
$$[YY] - d[YYX^3] - b[YYX^2] - c[YYX] - d[YY] -$$

$$= 0,025779922. \quad \text{З другої сторони } [VV] = 0,025780.$$

4.2. Оцінка точності параметрів, отриманих із рішення системи нормальних рівнянь

Середні квадратичні похибки визначаємих x_1, x_2, x_3, x_4 розраховуються за формулами:

$$m_{x_1} = \mu \sqrt{\frac{A_{11}}{D}}, \quad (4.2.1)$$



$$m_{x_2} = \mu \sqrt{\frac{A_{22}}{D}}, \quad (4.2.2)$$

$$m_{x_3} = \mu \sqrt{\frac{A_{33}}{D}}, \quad (4.2.3)$$

$$m_{x_4} = \mu \sqrt{\frac{A_{44}}{D}}, \quad (4.2.4)$$

де $m_{x_1}, m_{x_2}, m_{x_3}, m_{x_4}$ – середні квадратичні похибки визначаємих невідомих x_1, x_2, x_3, x_4 , μ – середня квадратична похибка одиниці ваги, яка розраховується за формулою

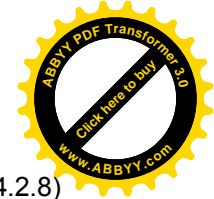
$$\mu = \sqrt{\frac{[VV]}{n - K}} \quad (4.2.5)$$

У формулі (4.2.5) n - число початкових рівнянь, K - число невідомих. В нашому випадку $n = 10; K = 4$. V - різниця між вихідним значенням y_i і вирахованим значенням y' за отриманою нами формулою (3.3.17);

$$V_i = y_i - y'_i \quad (4.2.6)$$

$A_{11}, A_{22}, A_{33}, A_{44}$ – алгебраїчні доповнення першого, другого, третього і четвертого діагональних елементів

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad (4.2.7)$$



$$A_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad (4.2.8)$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad (4.2.9)$$

$$A_{44} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad (4.2.10)$$

$$\text{де } \Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}. \quad (4.2.11)$$

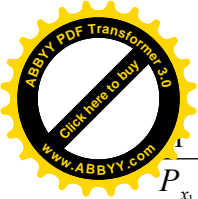
Приведемо формулу розкриття визначника третього порядку

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}). \quad (4.2.12)$$

І в нашому випадку отримаємо

	19119264		
	2	2445959	32938
A11=	4,7761E+11	2445959	32938
		32937,891	489,375
			10

величина оберненої ваги



$$\frac{1}{P_{x_1}} = \frac{A_{11}}{D} = \frac{4.7761E + 11}{1,38204E + 21} = 3.45593E - 10, \text{ а}$$

$$\sqrt{\frac{1}{P_{x_{11}}}} = 0,00001859.$$

		1266937543664	191192642	2445959
A22=	8,99382E+15	191192642	32938	489,375
		2445959	489	10

$$\frac{1}{P_{x_2}} = \frac{A_{22}}{D} = \frac{8,99382E + 15}{1.38204E + 21} = 0,000006508; \sqrt{\frac{1}{P_{x_{22}}}} = 0,00255.$$

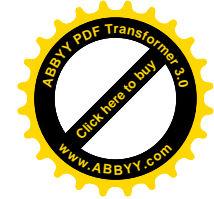
A33=	1,24719E+19	1266937543664	15408543314	2445959
		15408543314	191192642	32938
		2445959	32938	10

$$\frac{1}{P_{x_3}} = \frac{A_{33}}{D} = \frac{1,24719E + 19}{1.38204E + 21} = 0,00902; \sqrt{\frac{1}{P_{x_{33}}}} = 0,0950.$$

		1266937543664	15408543314	191192642
A44=	1,1858101,E+21	15408543314	191192642	2445959
		191192642	2445959	32938

$$\frac{1}{D_{\hat{\sigma}_4}} = \frac{A_{44}}{D} = \frac{1,1858101E + 21}{1.38204E + 21} = 0,8580; \sqrt{\frac{1}{P_{x_{44}}}} = 0,9263.$$

Підставляючи у виведену нами, формулу (3.3.17) значення X спотвореної моделі отримаємо розрахункові значення y' , які будуть дещо відрізнятись від вихідних значень Y .



Таблиця 6. порівняльний аналіз результатів строгого зрівноваження

№	$x_{істн.}$	$y_{спотв.}$	$y'_{зрівноваж}$	$V = y_i - y'_i$	V^2
1	0	8,918	8,9267954	-8,483E-03	7,1955E-05
2	11,25	8,959	8,9471662	1,140E-02	0,000130022
3	22,5	8,7898	8,7664004	2,341E-02	0,00054818
4	33,75	8,4427	8,4778739	-3,519E-02	0,001238557
5	45	8,1422	8,1749626	-3,275E-02	0,001072471
6	56,25	8,0439	7,9510423	9,290E-02	0,008631191
7	67,5	7,8114	7,8994888	-8,805E-02	0,007753298
8	78,75	8,1841	8,1136781	7,040E-02	0,004956332
9	84,375	8,3126	8,3496062	-3,697E-02	0,00136685
10	90	8,6903	8,686986	3,327E-03	1,10673E-05
$n=10$	489,375	84,294	84,29	0,0000000	0,025780

Тоді, середня квадратична похибка одиниці ваги буде

$$\mu = \sqrt{\frac{[VV]}{n - K}} = 0,065548865.$$

Середня квадратична похибка визначення коефіцієнта a

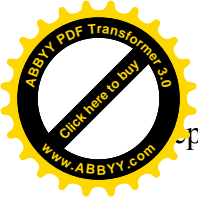
$$m_a = \mu \sqrt{\frac{1}{P_a}} = 0,065548865 * 0,00001859 = 1,21855E - 06$$

Середня квадратична похибка визначення коефіцієнта b

$$m_b = \mu \sqrt{\frac{1}{P_b}} = 0,065548865 * 0,00255 = 0,000167216$$

Середня квадратична похибка визначення коефіцієнта c

$$m_{\hat{n}} = \mu \sqrt{\frac{1}{P_{\hat{n}}}} = 0,065548865 * 0,0950 = 0,00622691$$



Середня квадратична похибка визначення коефіцієнта d

$$m_d = \mu \sqrt{\frac{1}{P_d}} = 0,065548865 * 0,9263 = 0,060717386$$

Середні квадратичні похибки зрівноваженої функції $m\varphi =$

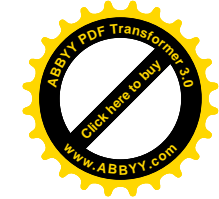
0,06071739
0,03755075
0,03990549
0,0366625
0,033123
0,03659812
0,03894628
0,03319601
0,03559588
0,05320682

Перевірка моделі на адекватність за критерієм Фішера

			106,918
	F=		2
		F>F(0,05;3;6)	
F(0,05;4;6)	4,53367		
=	7		
Модель адекватна експериментальним даним			

Встановлення значимості коефіцієнтів регресії

Коефіцієнти регресії значимі			
ta=	8,969818	t(0,05;6)=	2,44691
tb=	6,958105		2
tc=	80,83461	t(0,08;6)=	2,10430
td=	147,0221		6



Висновки

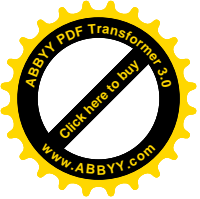
На основі проведених досліджень в даній роботі:

1. Генеровані випадкові числа, які приведено до нормованої досліджуваної точності.
2. На основі істинної моделі і генерованих істинних похибок побудована спотворена модель залежності магнітного моменту Землі від широти.
3. Математична модель апроксимована по способу найменших квадратів кубічним поліномом.
4. Отримана формула

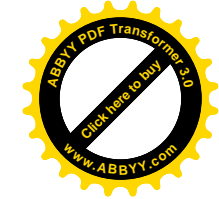
$$y' = 0,000010930x^3 - 0,001164x^2 + 0,013517x + 8,926795.$$
залежності магнітного моменту Землі Y від широти X .

Встановлено, що середня квадратична похибка одиниці ваги за результатами зрівноваження складає $\mu = 0,065548865 * 10^{22} \text{ ам}^2$.

5. Середня квадратична похибка визначення коефіцієнта a при x^3 $m_a = 1,21855E - 06$;
 - середня квадратична похибка визначення коефіцієнта b при x^2 $\delta_b = 0,000167216$;
 - середня квадратична похибка визначення коефіцієнта c при x $\delta_c = 0,00622691$;



- середня квадратична похибка визначення коефіцієнта d при $\delta_d = 0,060717386$.



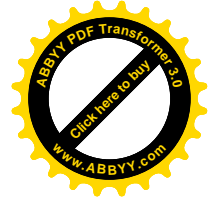
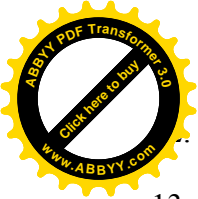
середні квадратичні похибки зрівноваженої функції $m\phi =$

0,06071739
0,03755075
0,03990549
0,0366625
0,033123
0,03659812
0,03894628
0,03319601
0,03559588
0,05320682

6. Розроблена методика підготовки істинних похибок наперед заданої точності.
7. Дана робота відкриває дорогу для проведення досліджень методом статистичних випробувань Монте Карло.
8. Вона дає можливість охопити велику аудиторію, тому що генеруються похибки індивідуально і вони не повторюються в других моделях.
9. Робота виконується вперше. Нам не відомі літературні джерела, де б виконувались аналогічні дослідження в курсі Фізики з основами геофізики.

Літературні джерела

1. Букеєв Б.О. Дослідження точності апроксимації залежності магнітного моменту Землі від широти методом статистичних випробувань Монте Карло. Модель ПГБ 61.-МЕГУ, Рівне, 2006, -29с.
2. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. – М.: Наука, 1973,-831с.
3. Кошкин Н. И., Ширкевич М. Г. Справочник по элементарной физике. – М.: Наука, 1972,-255с.
4. Кучерук І. М., Горбачук І. Т., Луцик П. П. Загальний курс фізики. Т. 1. – К.: Техніка, 1999,-536с.
5. Кучерук І. М., Горбачук І. Т., Луцик П. П. Загальний курс фізики. Т. 2. – К.: Техніка, 1999,-452с.
6. Кучерук І. М., Горбачук І. Т. Загальний курс фізики. Т.3 . – К.: Техніка, 1999,-520с.
7. Літнарівич Р. М. Дослідження точності апроксимації залежності магнітного моменту Землі від широти методом статистичних випробувань Монте Карло. Частина 1. МЕГУ, Рівне, 2006,-44с.
8. Літнарівич Р.М. Встановлення зв'язку між географічною і геомагнітною системами координат. Частина 2.МЕГУ,Рівне,2006,-47с.
9. Літнарівич Р.М. Фізика з основами геофізики. Курс лекцій.МЕГУ,Рівне,2007,-78с.
10. Літнарівич Р.М. Фізика з основами геофізики. Лабораторний практикум. Частина 1.МЕГУ,Рівне,2007,-44с.
11. Літнарівич Р.М. Фізика з основами геофізики. Лабораторний практикум. Частина 2.МЕГУ,Рівне,2008,-48с.



- Мудров В. И., Кушко В. Л. Методы обработки измерений. – М.: Сов. радио, 1976,-192с.
13. Пастушенко С. М. Формули і закони загальної фізики: навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів. 2е вид.: Діал., 2005,-2668с.
 14. Рего К. Г. Метрологическая обработка результатов технических измерений. Справочное пособие. – К.:Техніка, 1987,-126с.
 15. Розв'язування задач з курсу загальної фізики. Практикум/Остроухов А. А., Стрижевський В. Л., Цвілих М. Г. та інші. –К.: Радянська школа, 1966,-503с
 16. Савельев И. В. Курс физики. Т.1. –М.:Наука, 1989,-352с
 17. Савельев И. В. Курс физики. Т.2. –М.:Наука, 1989,-464с
 18. Савельев И. В. Курс общей физики. –М.:Наука, 1982, - 304с
 19. Ситніков О. П. Основи електродинаміки. Лабораторний практикум. Чернігів: ЧДІЕіУ, 2003,-48с
 20. Суботін С. І. Кора і мантия Землі. –К.: Знання,1996, -39с.
 21. Топографо-геодезические термины: справочник/ Кузьмин Б. С., Герасимов Ф. Я., Молоканов В. М. и др. – М.: Недра, 1989,-261с.
 22. Федоров Є. П. Обертання Землі. – К.:Знання, 1966,-52с
 23. Фізика з використанням обчислювальної техніки. Практичний курс/ В. М. Казанський, В. І. Кланченко, Д. Кошелева та ін. – К.: Либідь, 1993,-224с.

Додатки

Додаток 1.

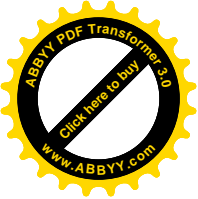
Генерування псевдовипадкових чисел, підпорядкування їх нормальному закону розподілу і розрахунок істинних похибок

0,84	0,546	0,294	0,08644	0,1153	0,01329703
0,55	0,546	0,004	0,00002	0,00157	0,00000246
0,39	0,546	-0,156	0,02434	-0,0612	0,00374377
0,15	0,546	-0,396	0,15682	-0,1553	0,02412405
0,21	0,546	-0,336	0,11290	-0,1318	0,01736755
0,63	0,546	0,084	0,00706	0,03295	0,00108547
0,31	0,546	-0,236	0,05570	-0,0926	0,00856809
0,87	0,546	0,324	0,10498	0,12708	0,01614916
0,67	0,546	0,124	0,01538	0,04864	0,00236539
0,84	0,546	0,294	0,08644	0,11531	0,01329703
5,46	5,46	0	0,65004	-1,8E-16	0,10000000
A	B	C	D	E	F

Додаток 2.

Побудова спотвореної моделі

0	8,803	0,1153	8,918
11,25	8,957	0,00157	8,959
22,5	8,851	-0,0612	8,7898
33,75	8,598	-0,1553	8,4427
45	8,274	-0,1318	8,1422
56,25	8,011	0,03295	8,0439
67,5	7,904	-0,0926	7,8114
78,75	8,057	0,12708	8,1841
84,375	8,264	0,04864	8,3126
90	8,575	0,11531	8,6903



489,375	84,294	-1,8E-16	84,294
I	G	E	H
Хексп.=Хістн.	Уістн.	Істинні похиб.	Усптв.

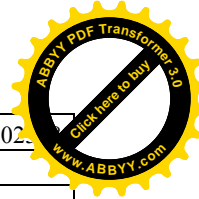
Додаток 3.

Розрахункова таблиця

0	1	0	0	0	0	0
11,25	1	126,563	1423,828	16018,066	180203,247	2027286,530
22,5	1	506,250	11390,625	256289,063	5766503,906	129746337,891
33,75	1	1139,063	38443,359	1297463,379	43789389,038	1477891880,035
45	1	2025,000	91125,000	4100625,000	184528125,000	8303765625,000
56,25	1	3164,063	177978,516	10011291,504	563135147,095	31676352024,078
67,5	1	4556,250	307546,875	20759414,063	1401260449,219	94585080322,266
78,75	1	6201,563	488373,047	38459377,441	3028675973,511	238508232913,971
84,375	1	7119,141	600677,490	50682163,239	4276307523,251	360813447274,268
90	1	8100,000	729000,000	65610000,000	5904900000,000	531441000000,000
489,375	10	32937,891	2445958,740	191192641,754	15408543314,266	1266937543664,040
I	J	K	L	M	N	O
Хексп.=Хістн.	X0	X^2	X^3	X^4	X^5	X^6

Продовження розрахункової таблиці

0	0	0	8,9267954	-8,483E-03	7,1955E-05
100,7839	1133,819	12755,46233	8,9471662	1,140E-02	0,000130022
197,770807	4449,843	100121,4711	8,7664004	2,341E-02	0,00054818
284,940477	9616,741	324565,0121	8,4778739	-3,519E-02	0,001238557
366,399631	16487,98	741959,2519	8,1749626	-3,275E-02	0,001072471
452,47199	25451,55	1431649,657	7,9510423	9,290E-02	0,008631191
527,271932	35590,86	2402382,741	7,8994888	-8,805E-02	0,007753298
644,496248	50754,08	3996883,766	8,1136781	7,040E-02	0,004956332
701,378604	59178,82	4993212,912	8,3496062	-3,697E-02	0,00136685
782,128147	70391,53	6335237,987	8,686986	3,327E-03	1,10673E-05

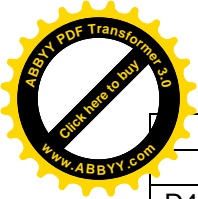


4057,642	273055,2	20338768,3	84,29	0,0000000	0,02
P	Q	R	S	T	U
YX	YX^2	YX^3	Y'зрівн.	V=Yсптв.-Yз	VV

Додаток 4.

Розрахунок визначників

1266937543664,04	15408543314,27	191192642	2445959
15408543314,266	191192642	2445959	32937,891
191192641,754	2445959	32938	489
2445958,740	32938	489	10
D=	1,38204E+21		
20338768,2608	15408543314	191192642	2445959
273055,22385	191192642	2445959	32938
4057,6417360	2445959	32938	489
84,294000000	32938	489	10
D1=	1,51058E+16		
1266937543664	20338768,261	191192642	2445959
15408543314	273055,224	2445959	32938
191192642	4057,642	32938	489,375
2445959	84,2940	489,375	10
D2=	-1,6080E+18		
1266937543664	15408543314	20338768	2445958,7
15408543314	191192642	273055	32937,891
191192642	2445959	4058	489,375
2445959	32938	84,294	10
D3=	1,8681E+19		
1266937543664	15408543314	191192642	20338768
15408543314	191192642	2445959	273055
191192642	2445959	32938	4058



	2445959	32938	489,375	84,294
D4=		1,2337E+22		

Додаток 5.

Вільні члени нормальних рівнянь

20338768,26
273055,224
4057,642
84,294

Додаток 6.

Розрахунок коефіцієнтів апроксимуючого поліному

a=D1/D=	0,000010930
b=D2/D=	-0,001164
c=D3/D=	0,013517
d=D4/D=	8,926795
Y=aX^3+bX^2+cX+d	

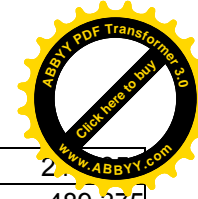
Нами виведена формула за результатами теоретичних досліджень:

$$\delta' = 0,000010930\delta^3 - 0,001164\delta^2 + 0,013517\delta + 8,926795.$$

Додаток 7.

Знаходження алгебраїчних доповнень

		1266937543664	15408543314	191192642
A44=	1,1858101,E+21	15408543314	191192642	2445959
		191192642	2445959	32938



		1266937543664	191192642	2445959
A22=	8,99382E+15	191192642	32938	489,375
		2445959	489	10

A33=	1,24719,E+19	1266937543664	15408543314	2445959
		15408543314	191192642	32938
		2445959	32938	10

		191192642	2445959	32938
A11=	4,7761E+11	2445959	32938	489,375
		32937,891	489,375	10

Додаток 8.

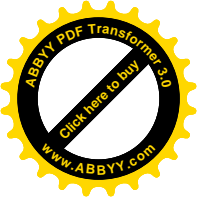
Контроль зрівноваження

[yy]-	a[yx^3]-	b[yx^2]	- c[yx] -	d[y]	=	0,025779922
					[VV] =	0,025779922
					Різниця=	0,000000

Додаток 9.

Оцінка точності зрівноважених елементів

Середня квадратична похибка одиниці ваги	
$\mu =$	0,065548865
Середня квадратична похибка коефіцієнта а	
$m_a =$	1,21855E-06
Середня квадратична похибка коефіцієнта в	
$m_b =$	0,000167216
Середня квадратична похибка коефіцієнта с	
$m_c =$	0,00622691
Середня квадратична похибка коефіцієнта d	
$m_d =$	0,060717386

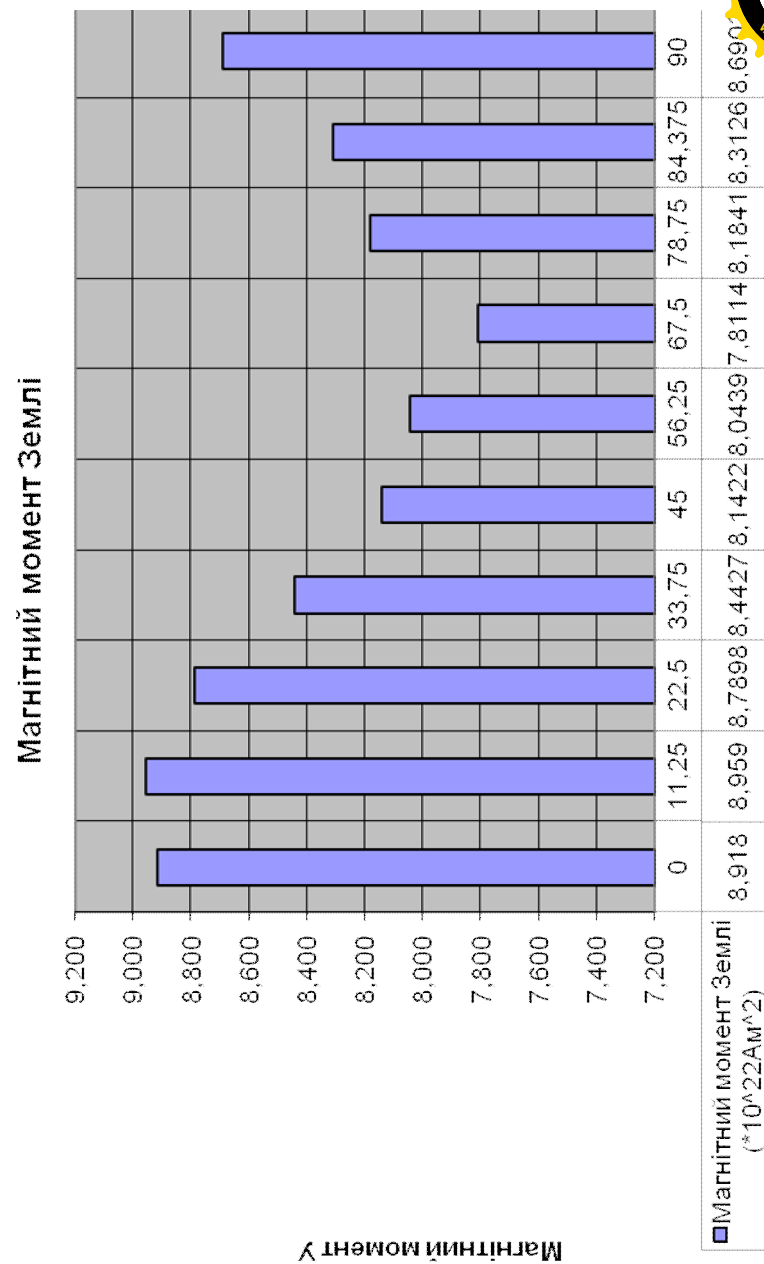
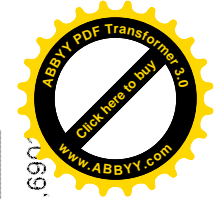


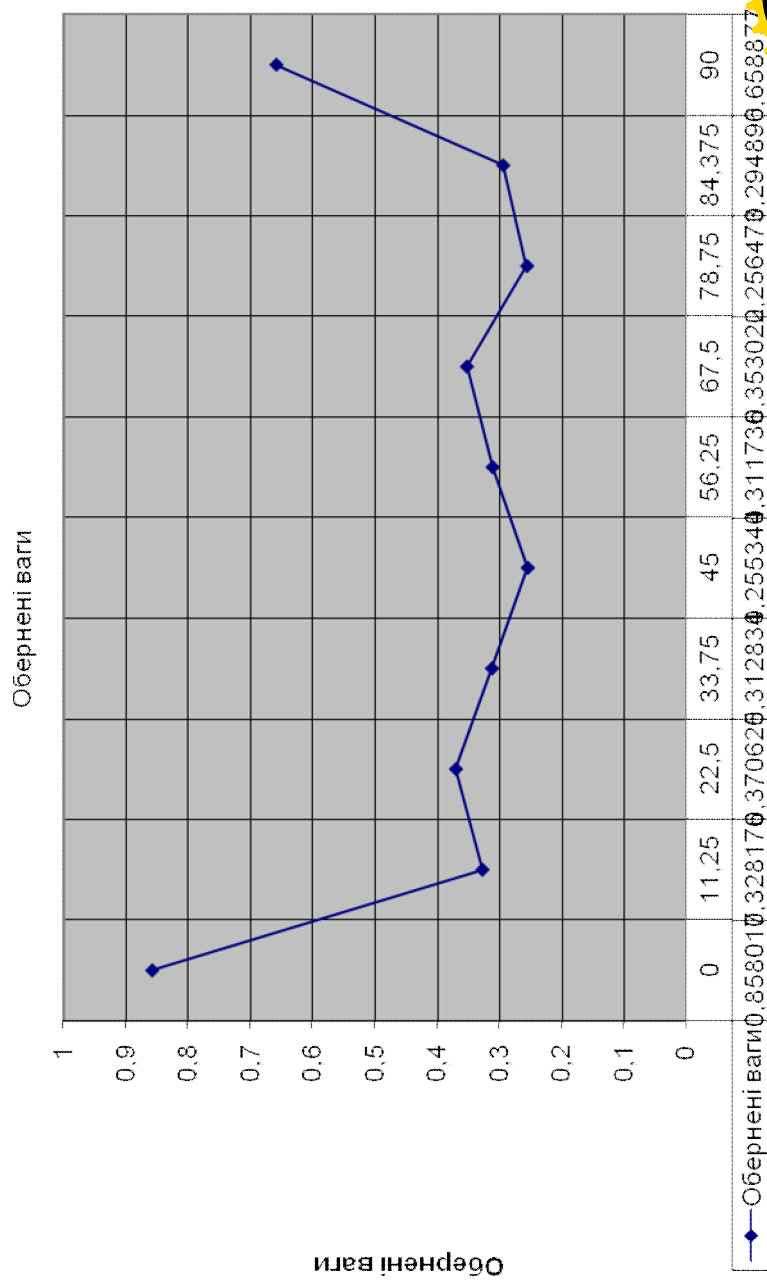
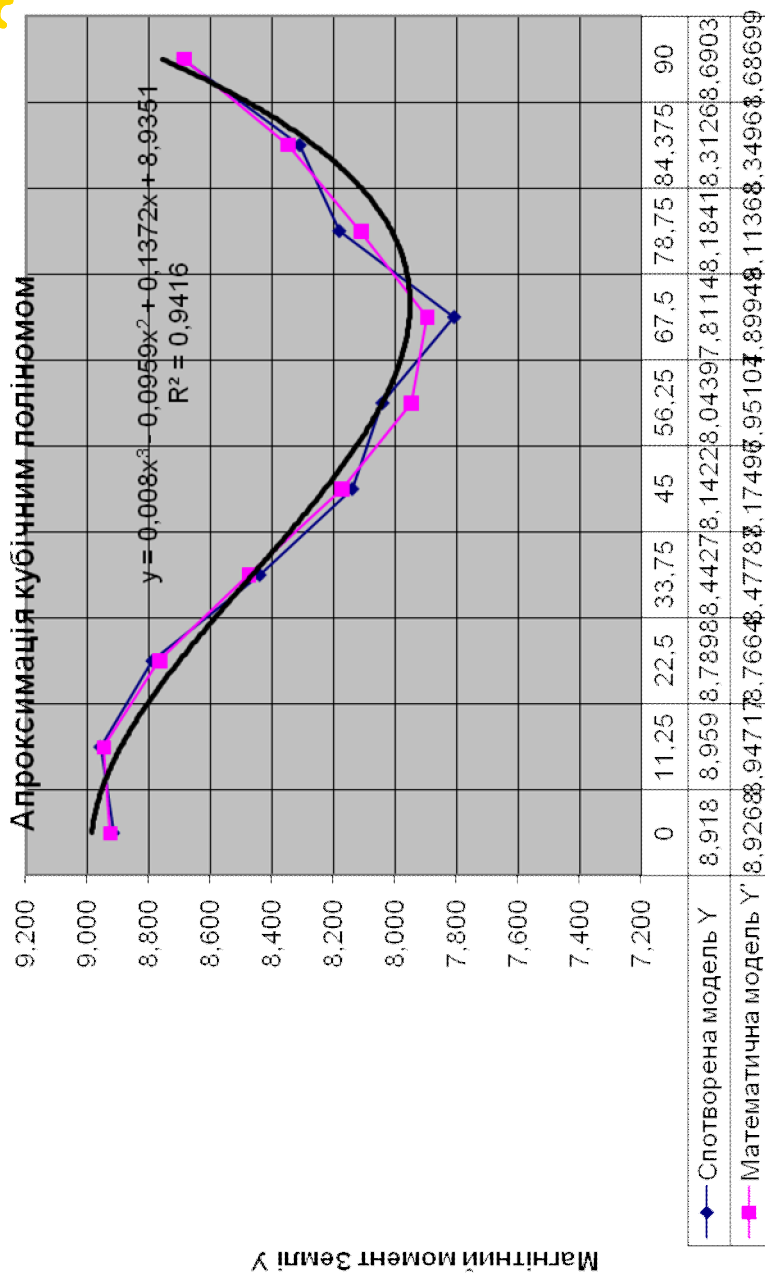
Середні квадратичні похибки зрівноваженої функції

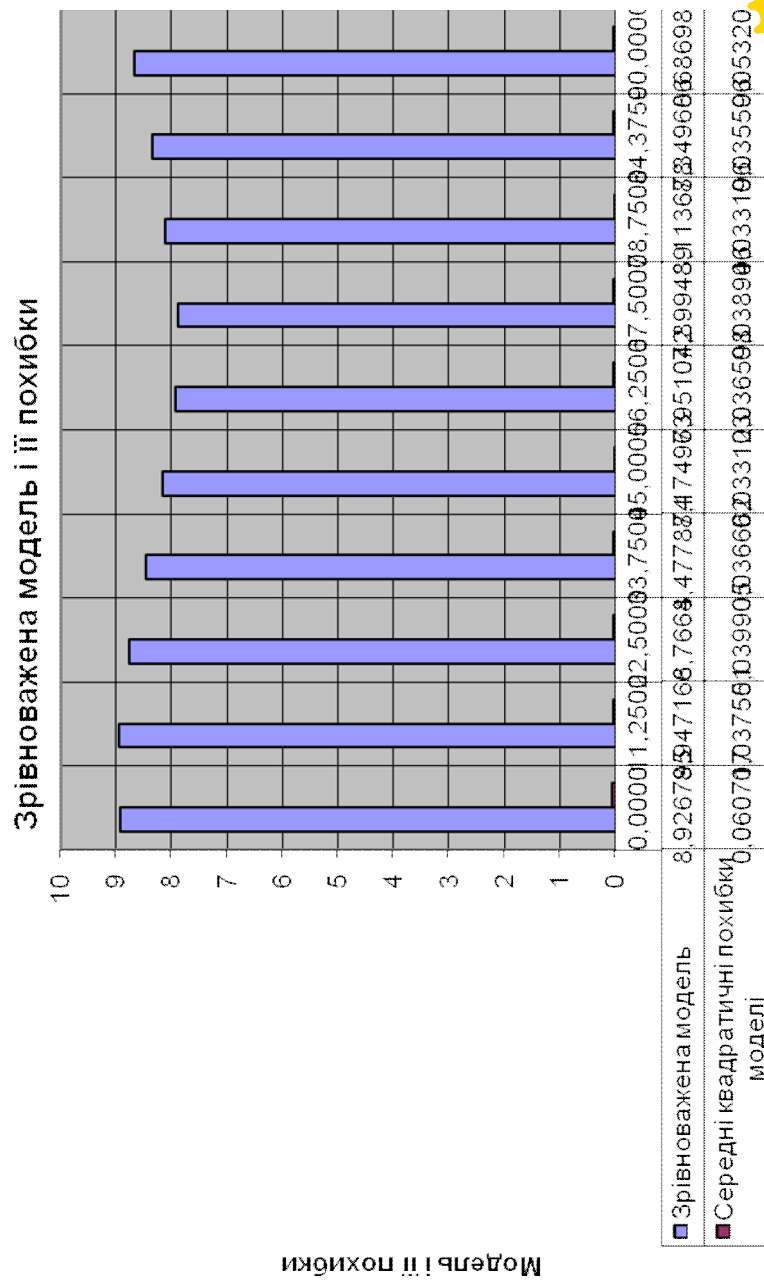
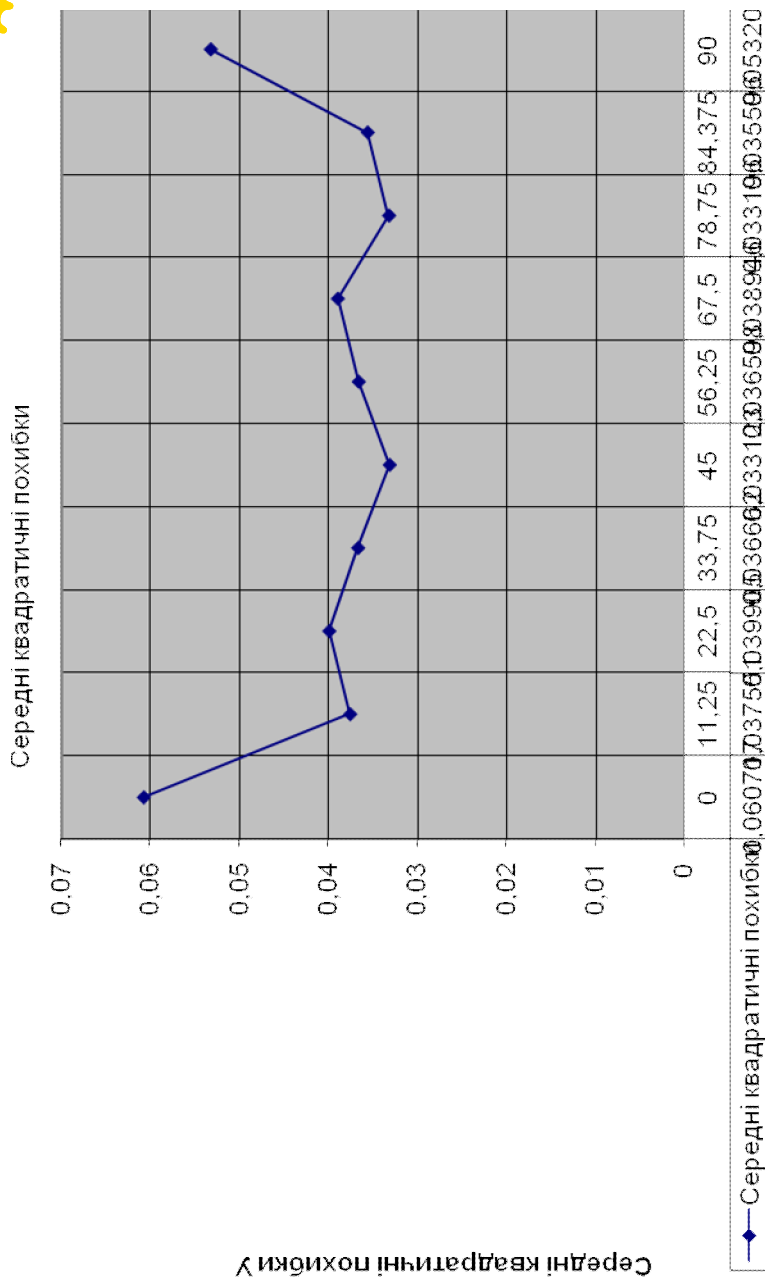
$m\varphi =$

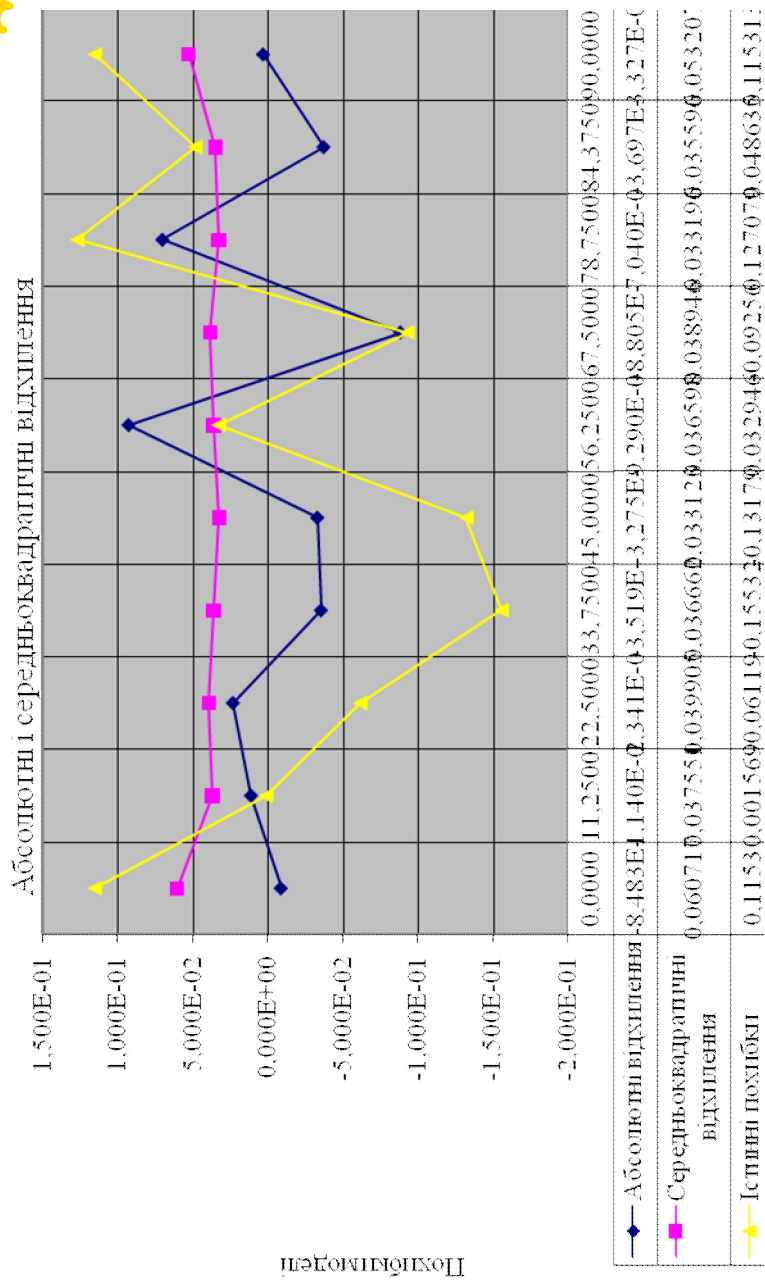
0,06071739
0,03755075
0,03990549
0,0366625
0,033123
0,03659812
0,03894628
0,03319601
0,03559588
0,05320682

Додаток 10. Діаграми досліджень

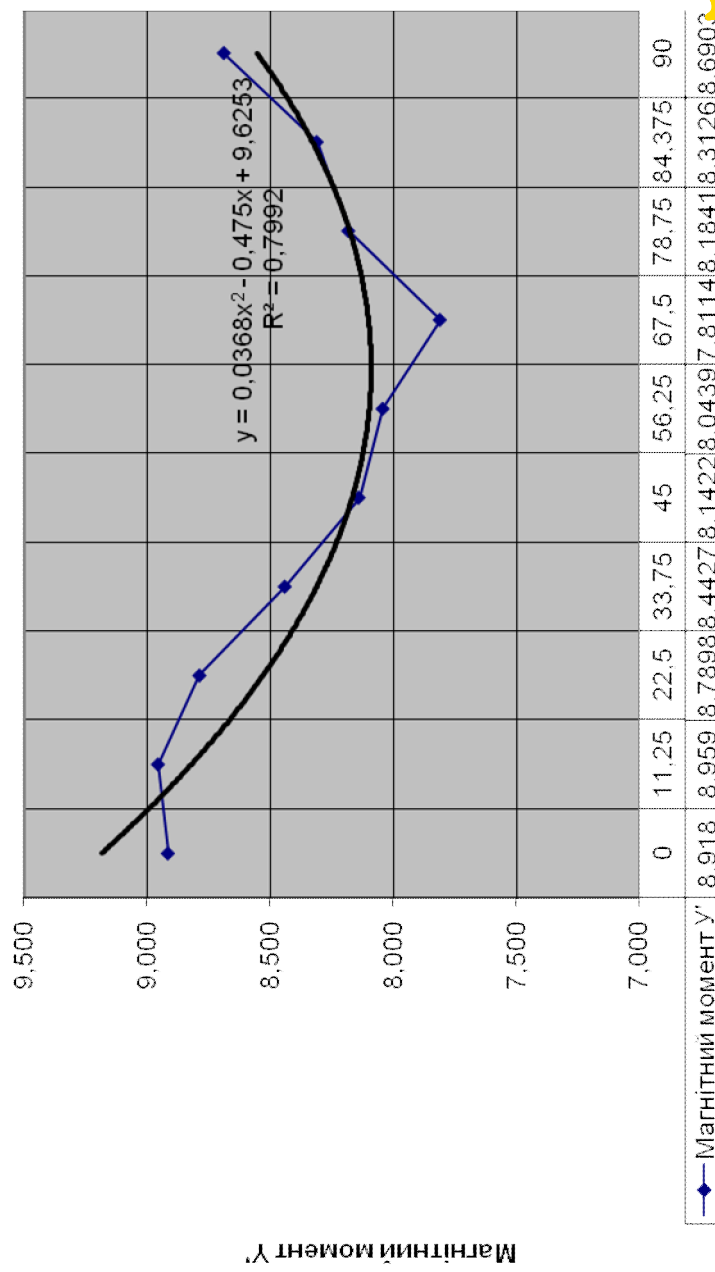




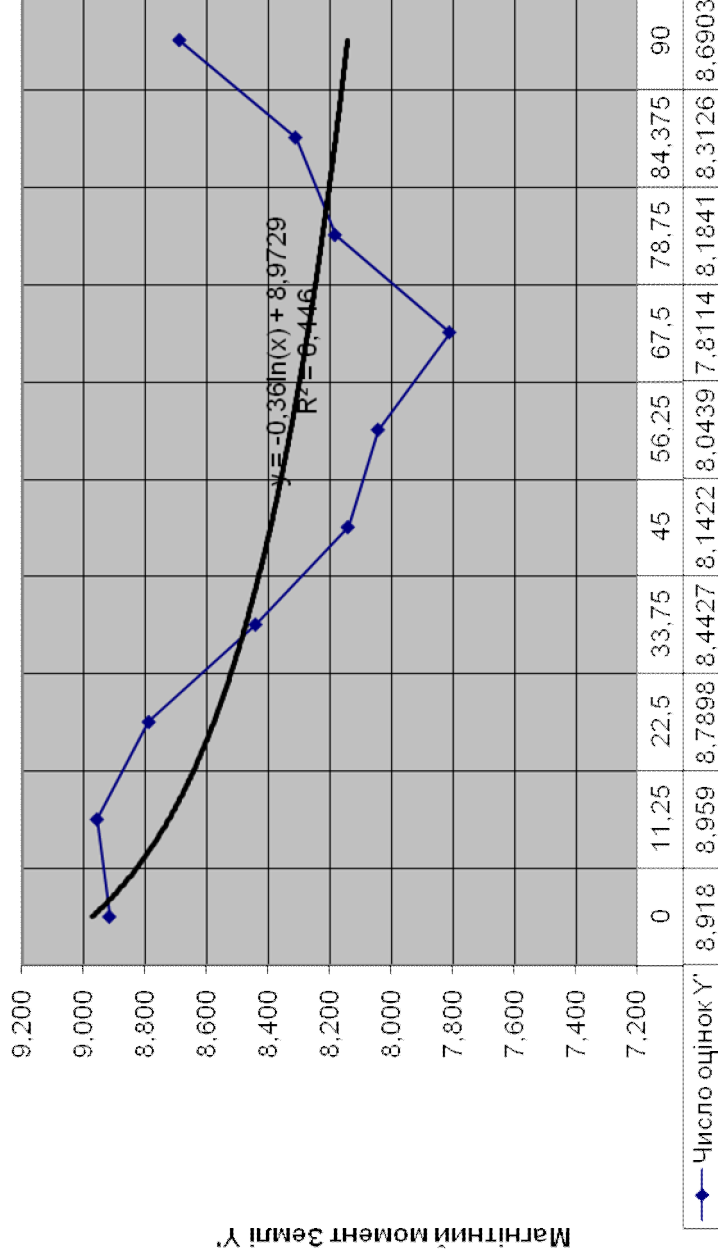




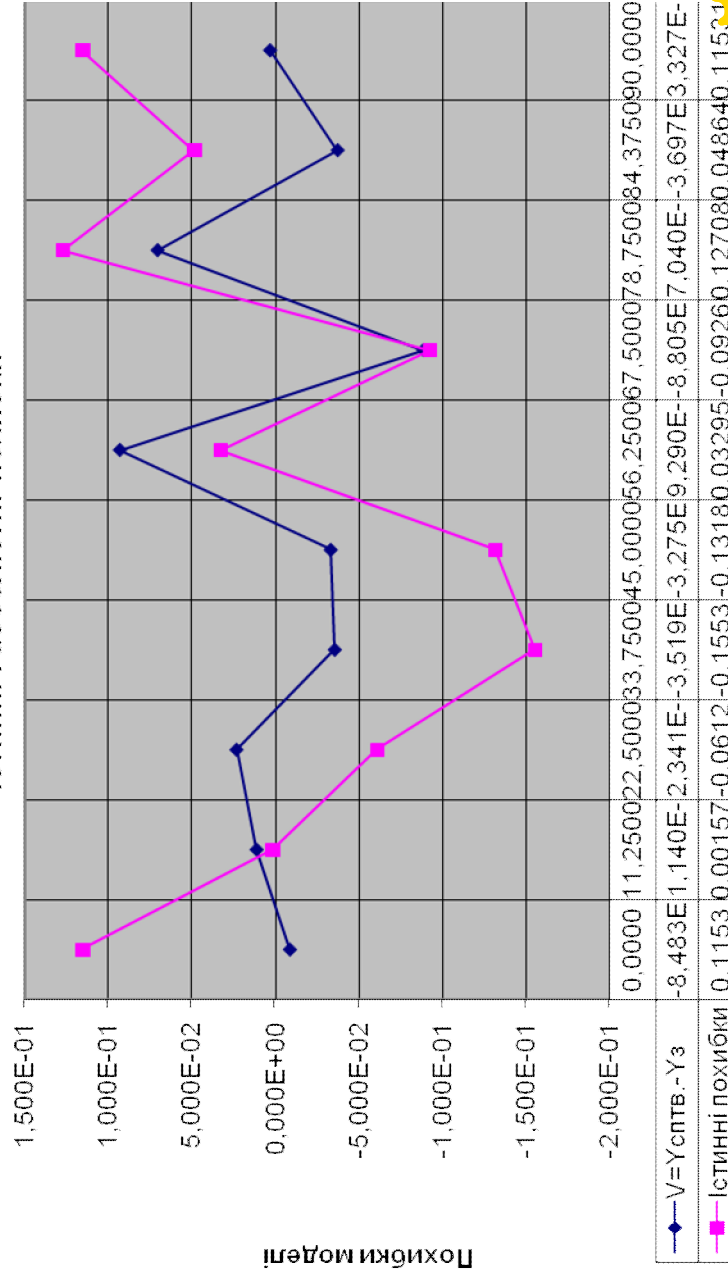
Апроксимація квадратичним поліномом

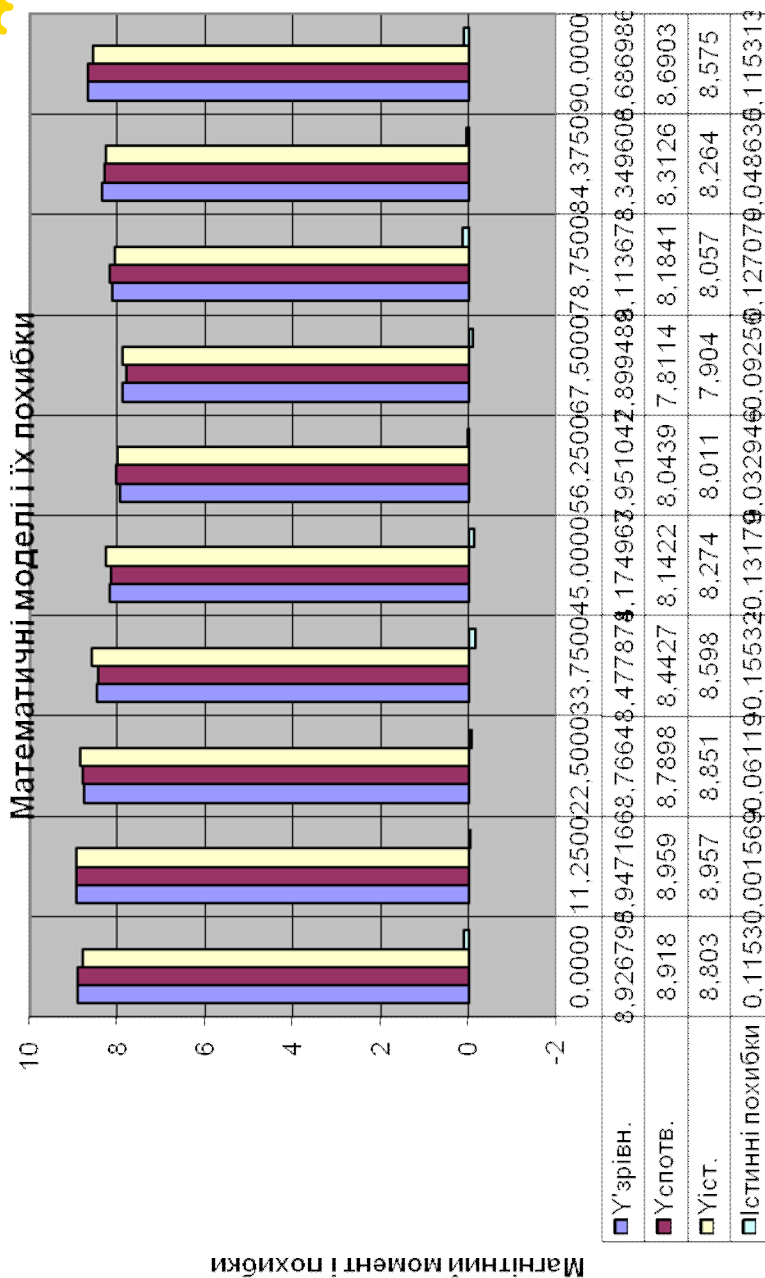
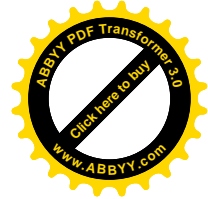
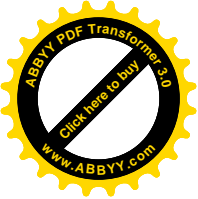


Апроксимация логарифмичною функцією



Істинні і абсолютні похибки





Додаток 11. Таблиці Валецького О.О.

Variant No./ Random values

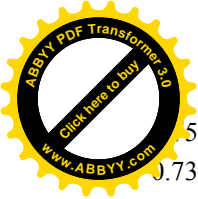
1	0.14	2	0.15	3	0.92	4	0.65	5	0.35	6	0.89	7	0.79	8	0.32	9	0.38	10	0.46	11	0.26	12	0.43	13	0.38	14	0.32	15	0.79	16	0.5
17	0.07	18	0.81	19	0.64	20	0.06	21	0.28	22	0.62	23	0.08	24	0.99	25	0.86	26	0.28	27	0.03	28	0.48	29	0.25	30	0.34	31	0.21	32	0.17
33	0.06	34	0.79	35	0.82	36	0.14	37	0.8	38	0.86	39	0.51	40	0.32	41	0.82	42	0.3	43	0.66	44	0.47	45	0.09	46	0.38	47	0.44	48	0.6
49	0.95	50	0.5	51	0.58	52	0.22	53	0.31	54	0.72	55	0.53	56	0.59	57	0.4	58	0.81	59	0.28	60	0.48	61	0.11	62	0.17	63	0.45	64	0.02
65	0.84	66	0.1	67	0.27	68	0.01	69	0.93	70	0.85	71	0.21	72	0.1	73	0.55	74	0.59	75	0.64	76	0.46	77	0.22	78	0.94	79	0.89	80	0.54
81	0.93	82	0.03	83	0.81	84	0.96	85	0.44	86	0.28	87	0.81	88	0.09	89	0.75	90	0.66	91	0.59	92	0.33	93	0.44	94	0.61	95	0.28	96	0.47
97	0.56	98	0.48	99	0.23	100	0.37	101	0.86	102	0.78	103	0.31	104	0.65	105	0.27	106	0.12	107	0.01	108	0.9	109	0.91	110	0.45	111	0.64	112	0.85
113	0.66	114	0.92	115	0.34	116	0.6	117	0.34	118	0.86	119	0.1	120	0.45	121	0.43	122	0.26	123	0.64	124	0.82	125	0.13	126	0.39	127	0.36	128	0.07
129	0.26	130	0.02	131	0.49	132	0.14	133	0.12	134	0.73	135	0.72	136	0.45	137	0.87	138	0	139	0.66	140	0.06	141	0.31	142	0.55	143	0.88	144	0.17

Variant No./ Random values

17	0.48	18	0.81	19	0.52	20	0.09	21	0.2	22	0.96	23	0.28	24	0.29	25	0.25	26	0.4	27	0.91	28	0.71	29	0.53	30	0.64	31	0.36	32	0.78
33	0.92	34	0.59	35	0.03	36	0.6	37	0.01	38	0.13	39	0.3	40	0.53	41	0.05	42	0.48	43	0.82	44	0.04	45	0.66	46	0.52	47	0.13	48	0.84
49	0.14	50	0.69	51	0.51	52	0.94	53	0.15	54	0.11	55	0.6	56	0.94	57	0.33	58	0.05	59	0.72	60	0.7	61	0.36	62	0.57	63	0.59	64	0.59
65	0.19	66	0.53	67	0.09	68	0.21	69	0.86	70	0.11	71	0.73	72	0.81	73	0.93	74	0.26	75	0.11	76	0.79	77	0.31	78	0.05	79	0.11	80	0.85
81	0.48	82	0.07	83	0.44	84	0.62	85	0.37	86	0.99	87	0.62	88	0.74	89	0.95	90	0.67	91	0.35	92	0.18	93	0.85	94	0.75	95	0.27	96	0.24
97	0.89	98	0.12	99	0.27	100	0.93	101	0.81	102	0.83	103	0.01	104	0.19	105	0.49	106	0.12	107	0.98	108	0.33	109	0.67	110	0.33	111	0.62	112	0.44
113	0.06	114	0.56	115	0.64	116	0.3	117	0.86	118	0.02	119	0.13	120	0.94	121	0.94	122	0.63	123	0.95	124	0.22	125	0.47	126	0.37	127	0.19	128	0.07
129	0.02	130	0.17	131	0.98	132	0.6	133	0.94	134	0.37	135	0.02	136	0.77	137	0.05	138	0.39	139	0.21	140	0.71	141	0.76	142	0.29	143	0.31	144	0.76
145	0.75	146	0.23	147	0.84	148	0.67	149	0.48	150	0.18	151	0.46	152	0.76	153	0.69	154	0.4	155	0.51	156	0.32	157	0	158	0.05	159	0.68	160	0.12
161	0.71	162	0.45	163	0.26	164	0.35	165	0.6	166	0.82	167	0.77	168	0.85	169	0.77	170	0.13	171	0.42	172	0.75	173	0.77	174	0.89	175	0.6	176	0.91

Variant No./ Random values

33	0.73	34	0.63	35	0.71	36	0.78	37	0.72	38	0.14	39	0.68	40	0.44	41	0.09	42	0.01	43	0.22	44	0.49	45	0.53	46	0.43	47	0.01	48	0.46
49	0.54	50	0.95	51	0.85	52	0.37	53	0.1	54	0.5	55	0.79	56	0.22	57	0.79	58	0.68	59	0.92	60	0.58	61	0.92	62	0.35	63	0.42	64	0.01
65	0.99	66	0.56	67	0.11	68	0.21	69	0.29	70	0.02	71	0.19	72	0.6	73	0.86	74	0.4	75	0.34	76	0.41	77	0.81	78	0.59	79	0.81	80	0.36
81	0.29	82	0.77	83	0.47	84	0.71	85	0.3	86	0.99	87	0.6	88	0.51	89	0.87	90	0.07	91	0.21	92	0.13	93	0.49	94	0.99	95	0.99	96	0.98
97	0.37	98	0.29	99	0.78	100	0.04	101	0.99	102	0.51	103	0.05	104	0.97	105	0.31	106	0.73	107	0.28	108	0.16	109	0.09	110	0.63	111	0.18	112	0.59
113	0.5	114	0.24	115	0.45	116	0.94	117	0.55	118	0.34	119	0.69	120	0.08	121	0.3	122	0.26	123	0.42	124	0.52	125	0.23	126	0.08	127	0.25	128	0.33
129	0.44	130	0.68	131	0.5	132	0.35	133	0.26	134	0.19	135	0.31	136	0.18	137	0.81	138	0.71	139	0.01	140	0	141	0.03	142	0.13	143	0.78	144	0.38



0.5 0.28 0.86 0.58 0.75 0.33 0.2 0.83 0.81 0.42 0.06 0.17 0.17 0.76 0.69 0.14
 0.73 0.03 0.59 0.82 0.53 0.49 0.04 0.28 0.75 0.54 0.68 0.73 0.11 0.59 0.56 0.28
 0.63 0.88 0.23 0.53 0.78 0.75 0.93 0.75 0.19 0.57 0.78 0.18 0.57 0.78 0.05 0.32

Variant No./ Random values

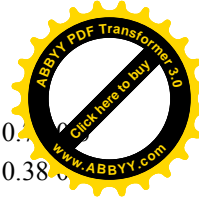
49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64
 0.17 0.12 0.26 0.8 0.66 0.13 0 0.19 0.27 0.87 0.66 0.11 0.19 0.59 0.09 0.21
 0.64 0.2 0.19 0.89 0.38 0.09 0.52 0.57 0.2 0.1 0.65 0.48 0.58 0.63 0.27 0.88
 0.65 0.93 0.61 0.53 0.38 0.18 0.27 0.96 0.82 0.3 0.3 0.19 0.52 0.03 0.53 0.01
 0.85 0.29 0.68 0.99 0.57 0.73 0.62 0.25 0.99 0.41 0.38 0.91 0.24 0.97 0.21 0.77
 0.52 0.83 0.47 0.91 0.31 0.51 0.55 0.74 0.85 0.72 0.42 0.45 0.41 0.5 0.69 0.59
 0.5 0.82 0.95 0.33 0.11 0.68 0.61 0.72 0.78 0.55 0.88 0.9 0.75 0.09 0.83 0.81
 0.75 0.46 0.37 0.46 0.49 0.39 0.31 0.92 0.55 0.06 0.04 0 0.92 0.77 0.01 0.67
 0.11 0.39 0 0.98 0.48 0.82 0.4 0.12 0.85 0.83 0.61 0.6 0.35 0.63 0.7 0.76
 0.6 0.1 0.47 0.1 0.18 0.19 0.42 0.95 0.55 0.96 0.19 0.89 0.46 0.76 0.78 0.37
 0.44 0.94 0.48 0.25 0.53 0.79 0.77 0.47 0.26 0.84 0.71 0.04 0.04 0.75 0.34 0.64

Variant No./ Random values

65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80
 0.62 0.08 0.04 0.66 0.84 0.25 0.9 0.69 0.49 0.12 0.93 0.31 0.36 0.77 0.02 0.89
 0.89 0.15 0.21 0.04 0.75 0.21 0.62 0.05 0.69 0.66 0.02 0.4 0.58 0.03 0.81 0.5
 0.19 0.35 0.11 0.25 0.33 0.82 0.43 0 0.35 0.58 0.76 0.4 0.24 0.74 0.96 0.47
 0.32 0.63 0.91 0.41 0.99 0.27 0.26 0.04 0.26 0.99 0.22 0.79 0.67 0.82 0.35 0.47
 0.81 0.63 0.6 0.09 0.34 0.17 0.21 0.64 0.12 0.19 0.92 0.45 0.86 0.31 0.5 0.3
 0.28 0.61 0.82 0.97 0.45 0.55 0.7 0.67 0.49 0.83 0.85 0.05 0.49 0.45 0.88 0.58
 0.69 0.26 0.99 0.56 0.9 0.92 0.72 0.1 0.79 0.75 0.09 0.3 0.29 0.55 0.32 0.11
 0.65 0.34 0.49 0.87 0.2 0.27 0.55 0.96 0.02 0.36 0.48 0.06 0.65 0.49 0.91 0.19
 0.88 0.18 0.34 0.79 0.77 0.53 0.56 0.63 0.69 0.8 0.74 0.26 0.54 0.25 0.27 0.86
 0.25 0.51 0.81 0.84 0.17 0.57 0.46 0.72 0.89 0.09 0.77 0.77 0.27 0.93 0.8 0

Variant No./ Random values

81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96
 0.81 0.64 0.7 0.6 0.01 0.61 0.45 0.24 0.91 0.92 0.17 0.32 0.17 0.21 0.47 0.72
 0.35 0.01 0.41 0.44 0.19 0.73 0.56 0.85 0.48 0.16 0.13 0.61 0.15 0.73 0.52 0.55
 0.21 0.33 0.47 0.57 0.41 0.84 0.94 0.68 0.43 0.85 0.23 0.32 0.39 0.07 0.39 0.41
 0.43 0.33 0.45 0.47 0.76 0.24 0.16 0.86 0.25 0.18 0.98 0.35 0.69 0.48 0.55 0.62
 0.09 0.92 0.19 0.22 0.21 0.84 0.27 0.25 0.5 0.25 0.42 0.56 0.88 0.76 0.71 0.79



0.04 0.94 0.6 0.16 0.53 0.46 0.68 0.04 0.98 0.86 0.27 0.23 0.27 0.91 0
 0.85 0.78 0.43 0.83 0.82 0.79 0.67 0.97 0.66 0.81 0.45 0.41 0 0.95 0.38
 0.78 0.63 0.6 0.95 0.06 0.8 0.06 0.42 0.25 0.12 0.52 0.05 0.11 0.73 0.92 0.98

0.48 0.96 0.08 0.41 0.28 0.48 0.86 0.26 0.94 0.56 0.04 0.24 0.19 0.65 0.28 0.5
 0.22 0.21 0.06 0.61 0.18 0.63 0.06 0.74 0.42 0.78 0.62 0.2 0.39 0.19 0.49 0.45

Variant No./ Random values

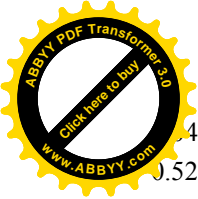
97 98 99 100 101 102 103 104 105 106 107 108 109 110 111 112
 0.04 0.71 0.23 0.71 0.37 0.86 0.96 0.09 0.56 0.36 0.43 0.71 0.91 0.72 0.87 0.46
 0.77 0.64 0.65 0.75 0.73 0.96 0.24 0.13 0.89 0.08 0.65 0.83 0.26 0.45 0.99 0.58
 0.13 0.39 0.04 0.78 0.02 0.75 0.9 0.09 0.94 0.65 0.76 0.4 0.78 0.95 0.12 0.69
 0.46 0.83 0.98 0.35 0.25 0.95 0.7 0.98 0.25 0.82 0.26 0.2 0.52 0.24 0.89 0.4
 0.77 0.26 0.71 0.94 0.78 0.26 0.84 0.82 0.6 0.14 0.76 0.99 0.09 0.02 0.64 0.01
 0.36 0.39 0.44 0.37 0.45 0.53 0.05 0.06 0.82 0.03 0.49 0.62 0.52 0.45 0.17 0.49
 0.39 0.96 0.51 0.43 0.14 0.29 0.8 0.91 0.9 0.65 0.92 0.5 0.93 0.72 0.21 0.69
 0.64 0.61 0.51 0.57 0.09 0.85 0.83 0.87 0.41 0.05 0.97 0.88 0.59 0.59 0.77 0.29
 0.75 0.49 0.89 0.3 0.16 0.17 0.53 0.92 0.84 0.68 0.13 0.82 0.68 0.68 0.38 0.68
 0.94 0.27 0.74 0.15 0.59 0.91 0.85 0.59 0.25 0.24 0.59 0.53 0.95 0.94 0.31 0.04

Variant No./ Random values

113 114 115 116 117 118 119 120 121 122 123 124 125 126 127 128
 0.99 0.72 0.52 0.46 0.8 0.84 0.59 0.87 0.27 0.36 0.44 0.69 0.58 0.48 0.65 0.38
 0.36 0.73 0.62 0.22 0.62 0.6 0.99 0.12 0.46 0.08 0.05 0.12 0.43 0.88 0.43 0.9
 0.45 0.12 0.44 0.13 0.65 0.49 0.76 0.27 0.8 0.79 0.77 0.15 0.69 0.14 0.35 0.99
 0.77 0 0.12 0.96 0.16 0.08 0.94 0.41 0.69 0.48 0.68 0.55 0.58 0.48 0.4 0.63
 0.53 0.42 0.2 0.72 0.22 0.58 0.28 0.48 0.86 0.48 0.15 0.84 0.56 0.02 0.85 0.06
 0.01 0.68 0.42 0.73 0.94 0.52 0.26 0.74 0.67 0.67 0.88 0.95 0.25 0.21 0.38 0.52
 0.25 0.49 0.95 0.46 0.66 0.72 0.78 0.23 0.98 0.64 0.56 0.59 0.61 0.16 0.35 0.48
 0.86 0.23 0.05 0.77 0.45 0.64 0.98 0.03 0.55 0.93 0.63 0.45 0.68 0.17 0.43 0.24
 0.11 0.25 0.15 0.07 0.6 0.69 0.47 0.94 0.51 0.09 0.65 0.96 0.09 0.4 0.25 0.22
 0.88 0.79 0.71 0.08 0.93 0.14 0.56 0.69 0.13 0.68 0.67 0.22 0.87 0.48 0.94 0.05

Variant No./ Random values

129 130 131 132 133 134 135 136 137 138 139 140 141 142 143 144
 0.6 0.1 0.15 0.03 0.3 0.86 0.17 0.92 0.86 0.8 0.92 0.08 0.74 0.76 0.09 0.17
 0.82 0.49 0.38 0.58 0.9 0.09 0.71 0.49 0.09 0.67 0.59 0.85 0.26 0.13 0.65 0.54
 0.97 0.81 0.89 0.31 0.29 0.78 0.48 0.21 0.68 0.29 0.98 0.94 0.87 0.22 0.65 0.88



4 0.85 0.75 0.64 0.01 0.42 0.7 0.47 0.75 0.55 0.13 0.23 0.79 0.64 0.14 0.51
 0.52 0.37 0.46 0.23 0.43 0.64 0.54 0.28 0.58 0.44 0.47 0.95 0.26 0.58 0.67 0.82
 0.1 0.51 0.14 0.13 0.54 0.73 0.57 0.39 0.52 0.31 0.13 0.42 0.71 0.66 0.1 0.21
 0.35 0.96 0.95 0.36 0.23 0.14 0.42 0.95 0.24 0.84 0.93 0.71 0.87 0.11 0.01 0.45
 0.76 0.54 0.03 0.59 0.02 0.79 0.93 0.44 0.03 0.74 0.2 0.07 0.31 0.05 0.78 0.53
 0.9 0.62 0.19 0.83 0.87 0.44 0.78 0.08 0.47 0.84 0.89 0.68 0.33 0.21 0.44 0.57
 0.13 0.86 0.87 0.51 0.94 0.35 0.06 0.43 0.02 0.18 0.45 0.31 0.91 0.04 0.84 0.81

Variant No./ Random values

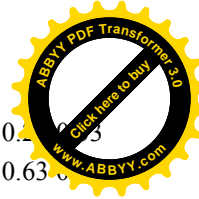
145 146 147 148 149 150 151 152 153 154 155 156 157 158 159 160
 0 0.53 0.7 0.61 0.46 0.8 0.67 0.49 0.19 0.27 0.81 0.91 0.19 0.79 0.39 0.95
 0.2 0.61 0.41 0.96 0.63 0.42 0.87 0.54 0.44 0.06 0.43 0.74 0.51 0.23 0.71 0.81
 0.92 0.17 0.99 0.98 0.39 0.1 0.15 0.91 0.95 0.61 0.81 0.46 0.75 0.14 0.26 0.91
 0.23 0.97 0.48 0.94 0.09 0.07 0.18 0.64 0.94 0.23 0.19 0.61 0.56 0.79 0.45 0.2
 0.8 0.95 0.14 0.65 0.5 0.22 0.52 0.31 0.6 0.38 0.81 0.93 0.01 0.42 0.09 0.37
 0.62 0.13 0.78 0.55 0.95 0.66 0.38 0.93 0.77 0.87 0.08 0.3 0.39 0.06 0.97 0.92
 0.07 0.73 0.46 0.72 0.21 0.82 0.56 0.25 0.99 0.66 0.15 0.01 0.42 0.15 0.03 0.06
 0.8 0.38 0.44 0.77 0.34 0.54 0.92 0.02 0.6 0.54 0.14 0.66 0.59 0.25 0.2 0.14
 0.97 0.44 0.28 0.5 0.73 0.25 0.18 0.66 0.6 0.02 0.13 0.24 0.34 0.08 0.81 0.9
 0.71 0.04 0.86 0.33 0.17 0.34 0.64 0.96 0.51 0.45 0.39 0.05 0.79 0.62 0.68 0.56

Variant No./ Random values

161 162 163 164 165 166 167 168 169 170 171 172 173 174 175 176
 0.1 0.05 0.5 0.81 0.06 0.65 0.87 0.96 0.99 0.81 0.63 0.57 0.47 0.36 0.38 0.4
 0.52 0.57 0.14 0.59 0.1 0.28 0.97 0.06 0.41 0.4 0.11 0.09 0.71 0.2 0.62 0.8
 0.43 0.9 0.39 0.75 0.95 0.15 0.67 0.71 0.57 0.7 0.04 0.2 0.33 0.78 0.69 0.93
 0.6 0.07 0.23 0.05 0.58 0.76 0.31 0.76 0.35 0.94 0.21 0.87 0.31 0.25 0.14 0.71
 0.2 0.53 0.29 0.28 0.19 0.18 0.26 0.18 0.61 0.25 0.86 0.73 0.21 0.57 0.91 0.98
 0.41 0.48 0.48 0.82 0.91 0.64 0.47 0.06 0.09 0.57 0.52 0.7 0.69 0.57 0.22 0.09
 0.17 0.56 0.71 0.16 0.72 0.29 0.1 0.98 0.16 0.9 0.91 0.52 0.8 0.17 0.35 0.06
 0.71 0.27 0.48 0.58 0.32 0.22 0.87 0.18 0.35 0.2 0.93 0.53 0.96 0.57 0.25 0.12
 0.1 0.83 0.57 0.91 0.51 0.36 0.98 0.82 0.09 0.14 0.44 0.21 0 0.67 0.51 0.03
 0.34 0.67 0.11 0.03 0.14 0.12 0.67 0.11 0.13 0.69 0.9 0.86 0.58 0.51 0.63 0.98

Variant No./ Random values

177 178 179 180 181 182 183 184 185 186 187 188 189 190 191 192
 0.31 0.5 0.19 0.7 0.16 0.51 0.51 0.16 0.85 0.17 0.14 0.37 0.65 0.76 0.18 0.35



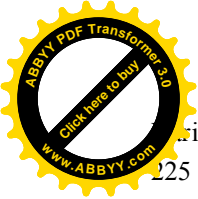
0.15 0.56 0.5 0.88 0.49 0.09 0.98 0.98 0.59 0.98 0.23 0.87 0.34 0.55 0.2
 0.16 0.35 0.5 0.76 0.47 0.91 0.85 0.35 0.89 0.32 0.26 0.18 0.54 0.89 0.63
 0.32 0.93 0.3 0.89 0.85 0.7 0.64 0.2 0.46 0.75 0.25 0.9 0.7 0.91 0.54 0.81
 0.41 0.65 0.49 0.85 0.94 0.61 0.63 0.71 0.8 0.27 0.09 0.81 0.99 0.43 0.09 0.92
 0.44 0.88 0.95 0.75 0.71 0.28 0.28 0.9 0.59 0.23 0.23 0.32 0.6 0.97 0.29 0.97
 0.12 0.08 0.44 0.33 0.57 0.32 0.65 0.48 0.93 0.82 0.39 0.11 0.93 0.25 0.97 0.46
 0.36 0.67 0.3 0.58 0.36 0.04 0.14 0.28 0.13 0.88 0.3 0.32 0.03 0.82 0.49 0.03
 0.75 0.89 0.85 0.24 0.37 0.44 0.17 0.02 0.91 0.32 0.76 0.56 0.18 0.09 0.37 0.73
 0.44 0.4 0.3 0.7 0.74 0.69 0.21 0.12 0.01 0.91 0.3 0.2 0.33 0.03 0.8 0.19

Variant No./ Random values

193 194 195 196 197 198 199 200 201 202 203 204 205 206 207 208
 0.76 0.21 0.1 0.11 0 0.44 0.92 0.93 0.21 0.51 0.6 0.84 0.24 0.44 0.85 0.96
 0.37 0.66 0.98 0.38 0.95 0.22 0.86 0.84 0.78 0.31 0.23 0.55 0.26 0.58 0.21 0.31
 0.44 0.95 0.76 0.85 0.72 0.62 0.43 0.34 0.41 0.89 0.3 0.39 0.68 0.64 0.26 0.24
 0.34 0.1 0.77 0.32 0.26 0.97 0.8 0.28 0.07 0.31 0.89 0.15 0.44 0.11 0.01 0.04
 0.46 0.82 0.32 0.52 0.71 0.62 0.01 0.05 0.26 0.52 0.27 0.21 0.11 0.66 0.03 0.96
 0.66 0.55 0.73 0.09 0.25 0.47 0.11 0.05 0.57 0.85 0.37 0.63 0.46 0.68 0.2 0.65
 0.31 0.09 0.89 0.65 0.26 0.91 0.86 0.2 0.56 0.47 0.69 0.31 0.25 0.7 0.58 0.63
 0.56 0.62 0.01 0.85 0.58 0.1 0.07 0.29 0.36 0.06 0.59 0.87 0.64 0.86 0.11 0.79
 0.1 0.45 0.33 0.48 0.85 0.03 0.46 0.11 0.36 0.57 0.68 0.67 0.53 0.24 0.94 0.41
 0.66 0.8 0.39 0.62 0.65 0.79 0.78 0.77 0.18 0.55 0.6 0.84 0.55 0.29 0.65 0.41

Variant No./ Random values

209 210 211 212 213 214 215 216 217 218 219 220 221 222 223 224
 0.26 0.65 0.4 0.85 0.3 0.61 0.43 0.44 0.43 0.18 0.58 0.67 0.69 0.75 0.14 0.56
 0.61 0.4 0.68 0 0.7 0.02 0.37 0.87 0.76 0.59 0.13 0.44 0.01 0.71 0.27 0.49
 0.47 0.04 0.2 0.56 0.22 0.3 0.53 0.89 0.94 0.56 0.13 0.14 0.07 0.11 0.27 0
 0.04 0.07 0.85 0.47 0.33 0.26 0.99 0.39 0.08 0.14 0.54 0.66 0.46 0.45 0.88 0.07
 0.97 0.27 0.08 0.26 0.68 0.3 0.63 0.43 0.28 0.58 0.78 0.56 0.98 0.3 0.52 0.35
 0.8 0.89 0.33 0.06 0.57 0.57 0.4 0.67 0.95 0.45 0.71 0.63 0.77 0.52 0.54 0.2
 0.21 0.14 0.95 0.57 0.61 0.58 0.14 0 0.25 0.01 0.26 0.22 0.85 0.94 0.13 0.02
 0.16 0.47 0.15 0.5 0.97 0.92 0.59 0.23 0.09 0.9 0.79 0.65 0.47 0.37 0.61 0.25
 0.51 0.76 0.56 0.75 0.13 0.57 0.51 0.78 0.29 0.66 0.64 0.54 0.77 0.91 0.74 0.5
 0.11 0.29 0.96 0.14 0.89 0.03 0.04 0.63 0.99 0.47 0.13 0.29 0.62 0.1 0.73 0.4



Variant No./ Random values

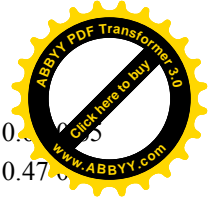
225 226 227 228 229 230 231 232 233 234 235 236 237 238 239 240
0.43 0.75 0.18 0.95 0.73 0.59 0.61 0.45 0.89 0.01 0.93 0.89 0.71 0.31 0.11 0.79
0.04 0.29 0.78 0.28 0.56 0.47 0.5 0.32 0.03 0.19 0.86 0.91 0.51 0.4 0.28 0.7
0.8 0.85 0.99 0.04 0.8 0.1 0.94 0.12 0.14 0.72 0.21 0.31 0.79 0.47 0.64 0.77
0.72 0.62 0.24 0.14 0.25 0.48 0.54 0.54 0.03 0.32 0.15 0.71 0.85 0.3 0.61 0.42
0.28 0.81 0.37 0.58 0.5 0.43 0.06 0.33 0.21 0.75 0.18 0.29 0.79 0.86 0.62 0.23
0.71 0.72 0.15 0.91 0.6 0.77 0.16 0.69 0.25 0.47 0.48 0.73 0.89 0.86 0.65 0.49
0.49 0.45 0.01 0.14 0.65 0.4 0.62 0.84 0.33 0.66 0.39 0.37 0.9 0.03 0.97 0.69
0.26 0.56 0.72 0.14 0.63 0.85 0.3 0.67 0.36 0.09 0.65 0.71 0.2 0.91 0.8 0.76
0.38 0.32 0.71 0.66 0.41 0.62 0.74 0.88 0.88 0 0.78 0.69 0.25 0.6 0.29 0.02
0.28 0.47 0.21 0.04 0.03 0.17 0.21 0.18 0.6 0.82 0.04 0.19 0 0.04 0.22 0.96

Variant No./ Random values

241 242 243 244 245 246 247 248 249 250 251 252 253 254 255 256
0.61 0.71 0.19 0.63 0.77 0.92 0.13 0.37 0.57 0.51 0.14 0.95 0.95 0.01 0.56 0.6
0.49 0.63 0.18 0.62 0.94 0.72 0.65 0.47 0.36 0.42 0.52 0.3 0.81 0.77 0.03 0.67
0.51 0.59 0.06 0.73 0.5 0.23 0.5 0.72 0.83 0.54 0.05 0.67 0.04 0.03 0.86 0.74
0.35 0.13 0.62 0.22 0.24 0.77 0.15 0.89 0.15 0.04 0.95 0.3 0.98 0.44 0.48 0.93
0.33 0.09 0.63 0.4 0.87 0.8 0.76 0.93 0.25 0.99 0.39 0.78 0.05 0.41 0.93 0.41
0.44 0.73 0.77 0.44 0.18 0.42 0.63 0.12 0.98 0.6 0.8 0.99 0.88 0.86 0.87 0.41
0.32 0.6 0.47 0.21 0.56 0.95 0.16 0.23 0.96 0.58 0.64 0.57 0.3 0.21 0.63 0.15
0.98 0.19 0.31 0.95 0.16 0.73 0.53 0.81 0.29 0.74 0.16 0.77 0.29 0.47 0.86 0.72
0.42 0.29 0.24 0.65 0.43 0.66 0.8 0.09 0.8 0.67 0.69 0.28 0.23 0.82 0.8 0.68
0.99 0.64 0 0.48 0.24 0.35 0.4 0.37 0.01 0.41 0.63 0.14 0.96 0.58 0.97 0.94

Variant No./ Random values

257 258 259 260 261 262 263 264 265 266 267 268 269 270 271 272
0.09 0.24 0.32 0.37 0.89 0.69 0.07 0.06 0.97 0.79 0.42 0.23 0.62 0.5 0.82 0.21
0.68 0.89 0.57 0.38 0.37 0.98 0.62 0.3 0.01 0.59 0.37 0.76 0.47 0.16 0.51 0.22
0.89 0.35 0.78 0.6 0.15 0.88 0.16 0.17 0.55 0.78 0.29 0.73 0.52 0.33 0.44 0.6
0.42 0.81 0.51 0.26 0.27 0.2 0.37 0.34 0.31 0.46 0.53 0.19 0.77 0.77 0.41 0.6
0.31 0.99 0.06 0.65 0.54 0.18 0.76 0.39 0.79 0.29 0.33 0.44 0.19 0.52 0.15 0.41
0.34 0.18 0.99 0.48 0.54 0.44 0.73 0.45 0.67 0.38 0.31 0.62 0.49 0.93 0.41 0.91
0.31 0.81 0.48 0.09 0.27 0.77 0.71 0.03 0.86 0.38 0.77 0.34 0.31 0.77 0.2 0.75
0.45 0.65 0.45 0.32 0.2 0.77 0.7 0.92 0.12 0.01 0.9 0.51 0.66 0.09 0.62 0.8



0.49 0.09 0.26 0.36 0.01 0.97 0.59 0.88 0.28 0.16 0.13 0.32 0.31 0.66 0.0
0.28 0.61 0.93 0.26 0.68 0.63 0.36 0.06 0.27 0.35 0.67 0.63 0.03 0.54 0.47

Variant No./ Random values

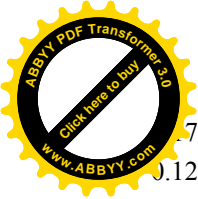
273 274 275 276 277 278 279 280 281 282 283 284 285 286 287 288
0.28 0.03 0.5 0.45 0.07 0.77 0.23 0.55 0.47 0.1 0.58 0.59 0.54 0.87 0.02 0.79
0.08 0.14 0.35 0.62 0.4 0.14 0.51 0.71 0.8 0.62 0.46 0.43 0.62 0.67 0.94 0.56
0.12 0.75 0.31 0.81 0.34 0.07 0.83 0.3 0.33 0.62 0.54 0.23 0.27 0.83 0.94 0.49
0.75 0.38 0.24 0.37 0.2 0.58 0.35 0.31 0.14 0.77 0.11 0.99 0.26 0.06 0.38 0.13
0.34 0.67 0.76 0.87 0.96 0.95 0.97 0.03 0.09 0.83 0.39 0.13 0.07 0.71 0.09 0.87
0.04 0.08 0.59 0.13 0.37 0.46 0.41 0.44 0.28 0.22 0.77 0.26 0.34 0.65 0.94 0.7
0.47 0.45 0.87 0.84 0.77 0.87 0.2 0.19 0.27 0.71 0.52 0.8 0.73 0.17 0.67 0.9
0.77 0.07 0.15 0.72 0.13 0.44 0.47 0.3 0.6 0.57 0 0.73 0.34 0.92 0.43 0.69
0.31 0.13 0.83 0.5 0.49 0.31 0.63 0.12 0.84 0.04 0.25 0.12 0.19 0.25 0.65 0.17
0.98 0.06 0.94 0.11 0.35 0.28 0.01 0.31 0.47 0.01 0.3 0.47 0.81 0.64 0.37 0.88

Variant No./ Random values

289 290 291 292 293 294 295 296 297 298 299 300 301 302 303 304
0.51 0.85 0.29 0.09 0.28 0.54 0.52 0.01 0.16 0.58 0.39 0.34 0.19 0.65 0.62 0.13
0.49 0.14 0.34 0.15 0.95 0.62 0.58 0.65 0.86 0.55 0.7 0.55 0.26 0.9 0.49 0.65
0.2 0.98 0.58 0.03 0.38 0.5 0.72 0.24 0.26 0.48 0.29 0.39 0.72 0.85 0.84 0.78
0.31 0.63 0.05 0.77 0.77 0.56 0.06 0.88 0.87 0.64 0.46 0.24 0.82 0.46 0.85 0.79
0.26 0.03 0.95 0.35 0.27 0.73 0.48 0.03 0.04 0.8 0.29 0 0.58 0.76 0.07 0.58
0.25 0.1 0.47 0.47 0.09 0.16 0.43 0.96 0.13 0.62 0.67 0.6 0.44 0.92 0.56 0.27
0.42 0.04 0.2 0.83 0.2 0.85 0.66 0.11 0.9 0.62 0.54 0.54 0.33 0.72 0.13 0.15
0.35 0.95 0.84 0.5 0.68 0.77 0.24 0.6 0.29 0.01 0.61 0.87 0.66 0.79 0.52 0.4
0.61 0.63 0.42 0.52 0.25 0.77 0.19 0.54 0.29 0.16 0.29 0.91 0.93 0.06 0.45 0.53
0.77 0.99 0.14 0.03 0.73 0.4 0.43 0.28 0.75 0.26 0.28 0.88 0.96 0.39 0.95 0.87

Variant No./ Random values

305 306 307 308 309 310 311 312 313 314 315 316 317 318 319 320
0.94 0.75 0.72 0.91 0.74 0.64 0.26 0.35 0.74 0.55 0.25 0.4 0.79 0.09 0.14 0.51
0.35 0.71 0.11 0.36 0.94 0.1 0.91 0.19 0.39 0.32 0.51 0.91 0.07 0.6 0.2 0.82
0.52 0.02 0.61 0.87 0.98 0.53 0.18 0.87 0.7 0.58 0.42 0.97 0.25 0.91 0.67 0.78
0.13 0.14 0.96 0.99 0 0.9 0.19 0.21 0.16 0.97 0.17 0.37 0.27 0.84 0.76 0.84
0.72 0.68 0.6 0.84 0.9 0.03 0.37 0.7 0.24 0.24 0.29 0.16 0.51 0.3 0.05 0
0.51 0.68 0.32 0.33 0.64 0.35 0.03 0.89 0.51 0.7 0.29 0.89 0.39 0.22 0.33 0.45



0.7 0.22 0.01 0.38 0.12 0.8 0.69 0.65 0.01 0.17 0.84 0.4 0.87 0.45 0.19 0.6
 0.12 0.12 0.28 0.59 0.93 0.71 0.62 0.31 0.3 0.17 0.11 0.44 0.48 0.46 0.4 0.9
 0.38 0.9 0.64 0.49 0.54 0.44 0 0.61 0.98 0.69 0.07 0.54 0.85 0.16 0.02 0.63
 0.27 0.5 0.52 0.98 0.34 0.91 0.87 0.4 0.78 0.66 0.8 0.88 0.18 0.33 0.85 0.1

Variant No./ Random values

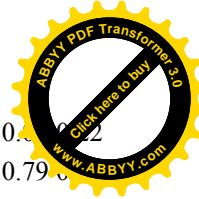
321 322 323 324 325 326 327 328 329 330 331 332 333 334 335 336
 0.22 0.83 0.34 0.5 0.85 0.04 0.86 0.08 0.25 0.03 0.93 0.02 0.13 0.32 0.19 0.71
 0.55 0.18 0.43 0.06 0.35 0.45 0.5 0.07 0.66 0.82 0.82 0.94 0.93 0.04 0.13 0.77
 0.65 0.52 0.79 0.39 0.75 0.17 0.54 0.61 0.39 0.53 0.98 0.46 0.83 0.39 0.36 0.38
 0.3 0.47 0.46 0.11 0.99 0.66 0.53 0.85 0.81 0.53 0.84 0.2 0.56 0.85 0.33 0.86
 0.21 0.86 0.72 0.52 0.33 0.4 0.28 0.3 0.87 0.11 0.23 0.28 0.27 0.89 0.21 0.25
 0.07 0.71 0.26 0.29 0.46 0.32 0.29 0.56 0.39 0.89 0.89 0.89 0.35 0.82 0.11 0.67
 0.45 0.62 0.7 0.1 0.21 0.83 0.56 0.46 0.22 0.01 0.34 0.96 0.71 0.51 0.88 0.19
 0.09 0.73 0.03 0.81 0.19 0.8 0.04 0.97 0.34 0.07 0.23 0.96 0.1 0.36 0.85 0.4
 0.66 0.43 0.19 0.39 0.5 0.97 0.9 0.19 0.06 0.99 0.63 0.95 0.52 0.45 0.3 0.05
 0.45 0.05 0.8 0.68 0.55 0.01 0.95 0.67 0.3 0.22 0.92 0.19 0.13 0.93 0.39 0.18

Variant No./ Random values

337 338 339 340 341 342 343 344 345 346 347 348 349 350 351 352
 0.56 0.8 0.34 0.49 0.03 0.98 0.2 0.59 0.55 0.1 0.02 0.26 0.35 0.35 0.36 0.19
 0.2 0.41 0.99 0.47 0.45 0.53 0.85 0.93 0.81 0.02 0.34 0.39 0.55 0.44 0.95 0.97
 0.78 0.37 0.79 0.02 0.37 0.42 0.16 0.17 0.27 0.11 0.17 0.23 0.64 0.34 0.35 0.43
 0.94 0.78 0.22 0.18 0.18 0.52 0.86 0.24 0.08 0.51 0.4 0.06 0.66 0.04 0.43 0.32
 0.58 0.88 0.56 0.98 0.67 0.05 0.43 0.15 0.47 0.06 0.96 0.57 0.47 0.45 0.85 0.5
 0.33 0.23 0.23 0.34 0.21 0.07 0.3 0.15 0.45 0.94 0.05 0.16 0.55 0.37 0.9 0.68
 0.66 0.27 0.33 0.37 0.99 0.58 0.51 0.15 0.62 0.57 0.84 0.32 0.29 0.88 0.27 0.37
 0.23 0.19 0.89 0.87 0.57 0.14 0.15 0.95 0.78 0.11 0.19 0.63 0.58 0.33 0 0.59
 0.4 0.87 0.3 0.68 0.12 0.16 0.02 0.87 0.64 0.96 0.28 0.67 0.44 0.6 0.47 0.74
 0.64 0.91 0.59 0.95 0.05 0.49 0.73 0.74 0.25 0.62 0.69 0.01 0.04 0.9 0.37 0.78

Variant No./ Random values

353 354 355 356 357 358 359 360 361 362 363 364 365 366 367 368
 0.19 0.86 0.83 0.59 0.38 0.14 0.65 0.74 0.12 0.68 0.04 0.92 0.56 0.48 0.79 0.85
 0.56 0.14 0.53 0.72 0.34 0.78 0.67 0.33 0.03 0.9 0.46 0.88 0.38 0.34 0.36 0.34
 0.65 0.53 0.79 0.49 0.86 0.41 0.92 0.7 0.56 0.38 0.72 0.93 0.17 0.48 0.72 0.33
 0.2 0.83 0.76 0.01 0.12 0.3 0.29 0.91 0.13 0.67 0.93 0.86 0.27 0.08 0.94 0.38



0.79 0.93 0.62 0.01 0.62 0.95 0.15 0.41 0.33 0.71 0.42 0.48 0.92 0.83 0.0
 0.01 0.26 0.9 0.14 0.75 0.46 0.68 0.47 0.65 0.35 0.76 0.16 0.47 0.73 0.79
 0.75 0.2 0.04 0.9 0.75 0.71 0.55 0.52 0.78 0.19 0.65 0.36 0.21 0.32 0.39 0.26
 0.4 0.61 0.6 0.13 0.63 0.58 0.15 0.59 0.07 0.42 0.2 0.2 0.2 0.31 0.87 0.27
 0.76 0.05 0.27 0.72 0.19 0 0.55 0.61 0.48 0.42 0.55 0.51 0.87 0.92 0.53 0.03
 0.43 0.51 0.39 0.84 0.42 0.53 0.22 0.34 0.15 0.76 0.23 0.36 0.1 0.64 0.25 0.06

Variant No./ Random values

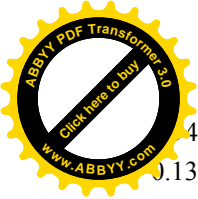
369 370 371 372 373 374 375 376 377 378 379 380 381 382 383 384
 0.39 0.04 0.97 0.5 0.08 0.65 0.62 0.71 0.09 0.53 0.59 0.19 0.46 0.58 0.97 0.51
 0.41 0.31 0.03 0.48 0.22 0.76 0.93 0.06 0.24 0.74 0.35 0.36 0.32 0.56 0.91 0.6
 0.78 0.15 0.47 0.81 0.81 0.15 0.28 0.43 0.66 0.79 0.57 0.06 0.11 0.08 0.61 0.53
 0.31 0.5 0.44 0.52 0.12 0.74 0.73 0.92 0.45 0.44 0.94 0.54 0.23 0.68 0.28 0.86
 0.06 0.13 0.4 0.84 0.14 0.86 0.37 0.76 0.7 0.09 0.61 0.2 0.71 0.51 0.24 0.91
 0.4 0.43 0.02 0.72 0.53 0.86 0.07 0.64 0.82 0.36 0.34 0.14 0.33 0.46 0.23 0.51
 0.89 0.75 0.76 0.64 0.52 0.16 0.41 0.37 0.67 0.96 0.9 0.31 0.49 0.5 0.19 0.1
 0.85 0.75 0.98 0.44 0.23 0.91 0.98 0.62 0.91 0.64 0.21 0.93 0.99 0.49 0.07 0.23
 0.62 0.34 0.64 0.68 0.44 0.11 0.73 0.94 0.03 0.26 0.59 0.18 0.4 0.44 0.37 0.8
 0.51 0.33 0.38 0.94 0.52 0.57 0.42 0.39 0.95 0.08 0.29 0.65 0.91 0.22 0.85 0.08

Variant No./ Random values

385 386 387 388 389 390 391 392 393 394 395 396 397 398 399 400
 0.55 0.58 0.21 0.57 0.25 0.03 0.1 0.71 0.25 0.7 0.12 0.66 0.83 0.02 0.4 0.29
 0.29 0.52 0.52 0.2 0.11 0.87 0.26 0.76 0.75 0.62 0.2 0.41 0.54 0.2 0.51 0.61
 0.84 0.16 0.34 0.84 0.75 0.65 0.16 0.99 0.98 0.11 0.61 0.41 0.01 0 0.29 0.96
 0.07 0.83 0.86 0.9 0.92 0.91 0.6 0.3 0.28 0.84 0 0.26 0.91 0.04 0.14 0.07
 0.92 0.88 0.62 0.15 0.07 0.84 0.24 0.51 0.67 0.09 0.08 0.7 0 0.69 0.92 0.82
 0.12 0.06 0.6 0.41 0.83 0.71 0.8 0.65 0.35 0.56 0.72 0.52 0.53 0.25 0.67 0.53
 0.28 0.61 0.29 0.1 0.42 0.48 0.77 0.61 0.82 0.58 0.29 0.76 0.51 0.57 0.95 0.98
 0.47 0.03 0.56 0.22 0.26 0.29 0.34 0.86 0 0.34 0.15 0.87 0.22 0.98 0.05 0.34
 0.98 0.96 0.5 0.22 0.62 0.91 0.74 0.87 0.88 0.2 0.27 0.34 0.2 0.92 0.22 0.24
 0.53 0.39 0.85 0.62 0.64 0.76 0.69 0.14 0.9 0.55 0.62 0.84 0.25 0.03 0.91 0.27

Variant No./ Random values

401 402 403 404 405 406 407 408 409 410 411 412 413 414 415 416
 0.57 0.71 0.02 0.84 0.02 0.79 0.98 0.06 0.63 0.65 0.82 0.54 0.88 0.92 0.64 0.88
 0.02 0.54 0.56 0.61 0.01 0.72 0.96 0.7 0.26 0.64 0.07 0.65 0.59 0.04 0.29 0.09



4 0.56 0.81 0.5 0.65 0.26 0.53 0.05 0.37 0.18 0.29 0.41 0.27 0.03 0.36 0.93
 0.13 0.78 0.51 0.78 0.6 0.9 0.4 0.7 0.86 0.67 0.11 0.49 0.65 0.58 0.34 0.34
 0.34 0.76 0.93 0.38 0.57 0.81 0.71 0.13 0.86 0.45 0.58 0.73 0.67 0.81 0.23 0.01
 0.45 0.87 0.68 0.71 0.26 0.6 0.34 0.89 0.13 0.9 0.95 0.62 0 0.99 0.39 0.36
 0.1 0.31 0.02 0.91 0.61 0.61 0.52 0.88 0.13 0.84 0.37 0.9 0.99 0.04 0.23 0.17
 0.47 0.33 0.63 0.94 0.8 0.45 0.75 0.93 0.14 0.93 0.14 0.05 0.29 0.76 0.34 0.75
 0.74 0.81 0.19 0.35 0.67 0.09 0.11 0.01 0.37 0.75 0.17 0.21 0 0.8 0.31 0.55
 0.9 0.24 0.85 0.3 0.9 0.66 0.92 0.03 0.76 0.71 0.92 0.2 0.33 0.22 0.9 0.94

Variant No./ Random values

417 418 419 420 421 422 423 424 425 426 427 428 429 430 431 432
 0.33 0.46 0.76 0.85 0.14 0.22 0.14 0.47 0.73 0.79 0.39 0.37 0.51 0.7 0.34 0.43
 0.66 0.19 0.91 0.04 0.03 0.37 0.51 0.11 0.73 0.54 0.71 0.91 0.85 0.5 0.46 0.44
 0.9 0.26 0.36 0.55 0.12 0.81 0.62 0.28 0.82 0.44 0.62 0.57 0.59 0.16 0.33 0.3
 0.39 0.1 0.72 0.25 0.38 0.37 0.42 0.18 0.21 0.4 0.88 0.35 0.08 0.65 0.73 0.91
 0.77 0.15 0.09 0.68 0.28 0.87 0.47 0.82 0.65 0.69 0.95 0.99 0.57 0.44 0.9 0.66
 0.17 0.58 0.34 0.41 0.37 0.52 0.23 0.97 0.09 0.68 0.34 0.08 0 0.53 0.55 0.98
 0.49 0.17 0.54 0.17 0.38 0.18 0.83 0.99 0.94 0.46 0.97 0.48 0.67 0.62 0.65 0.51
 0.65 0.82 0.76 0.58 0.48 0.35 0.88 0.45 0.31 0.42 0.77 0.56 0.87 0.9 0.02 0.9
 0.95 0.17 0.02 0.83 0.52 0.97 0.16 0.34 0.45 0.62 0.12 0.96 0.4 0.43 0.52 0.31
 0.17 0.6 0.06 0.65 0.1 0.12 0.41 0.2 0.06 0.59 0.75 0.58 0.51 0.27 0.61 0.78

Variant No./ Random values

433 434 435 436 437 438 439 440 441 442 443 444 445 446 447 448
 0.58 0.38 0.29 0.2 0.41 0.97 0.48 0.44 0.23 0.6 0.8 0.07 0.19 0.3 0.45 0.76
 0.18 0.93 0.23 0.49 0.22 0.92 0.79 0.65 0.01 0.98 0.75 0.18 0.72 0.12 0.72 0.67
 0.5 0.79 0.81 0.25 0.54 0.7 0.95 0.89 0.04 0.55 0.63 0.57 0.92 0.12 0.21 0.03
 0.33 0.46 0.69 0.74 0.99 0.23 0.56 0.3 0.25 0.49 0.47 0.8 0.24 0.9 0.11 0.41
 0.95 0.21 0.23 0.82 0.81 0.53 0.09 0.11 0.4 0.79 0.07 0.38 0.6 0.25 0.15 0.22
 0.74 0.29 0.95 0.81 0.8 0.72 0.47 0.16 0.25 0.91 0.66 0.85 0.45 0.13 0.33 0.12
 0.39 0.48 0.04 0.94 0.7 0.79 0.11 0.91 0.53 0.26 0.73 0.43 0.02 0.82 0.44 0.18
 0.6 0.41 0.42 0.63 0.63 0.95 0.48 0 0.04 0.48 0 0.26 0.7 0.49 0.62 0.48
 0.2 0.17 0.92 0.89 0.64 0.76 0.69 0.75 0.83 0.18 0.32 0.71 0.31 0.42 0.51 0.7
 0.29 0.69 0.23 0.48 0.89 0.62 0.76 0.68 0.44 0.03 0.23 0.26 0.09 0.27 0.52 0.49



Оксана Іванівна Гомечко

**ПОБУДОВА І ДОСЛІДЖЕННЯ
 МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ
 ЗАЛЕЖНОСТІ МАГНІТНОГО МОМЕНТУ
 ЗЕМЛІ ВІД ШИРОТИ МЕТОДОМ
 СТАТИСТИЧНИХ ВИПРОБУВАНЬ МОНТЕ
 КАРЛО
 Апроксимація поліномом третього степеня**

Модель ПГБ-10-204

Книга написана за матеріалами роботи наукової фізико-математичної школи МЕНУ

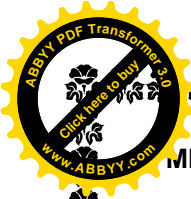
**Науковий керівник – кандидат технічних наук,
 доцент Літнарівч Руслан Миколайович**

*Комп'ютерний набір, верстка – дизайн у
 редакторі Microsoft® Office 2003® Word*

О.І.Гомечко

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
 МІЖНАРОДНИЙ ЕКОНОМІКО-ГУМАНІТАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
 Ім.акад. С.Дем'янчука**

**Кафедра Математичного моделювання
 33027, м.Рівне, Україна
 вул.акад. С.Дем'янчука, 4, корпус 1
 Телефон: (+00380) 362 23-73-09
 Факс: (+00380) 362 23-01-86
 E-mail: mail@regi.rovno.ua**



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МІЖНАРОДНИЙ ЕКОНОМІКО-ГУМАНІТАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Ім.акад. С.Дем'янчука

О.І.Доукіна

**ПОБУДОВА І ДОСЛІДЖЕННЯ
МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ
ЗАЛЕЖНОСТІ МАГНІТНОГО МОМЕНТУ
ЗЕМЛІ ВІД ШИРОТИ МЕТОДОМ
СТАТИСТИЧНИХ ВИПРОБУВАНЬ МОНТЕ
КАРЛО**

Апроксимація поліномом третього степеня



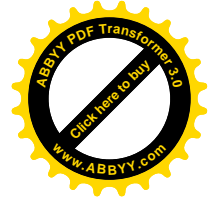
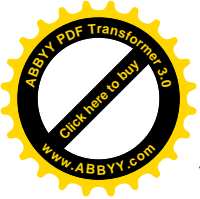
Модель ПГБ10-206

Науковий керівник:
кандидат технічних наук,
доцент Р. М. Літнарівч

Рівне – 2010



Доукіна Ольга Ігорівна



УДК 53. 02:550.38

Докукіна О.І. Побудова і дослідження математичної моделі залежності магнітного моменту Землі від широти методом статистичних випробувань Монте Карло. Апроксимація поліномом третього степеня. Модель ПГБ10-206.МЕГУ, Рівне, 2010, 62 с.

Рецензент: В. Г.Бурачек, доктор технічних наук, професор

Відповідальний за випуск: Й. В. Джунь, доктор фізико-математичних наук, професор

Книга написана за матеріалами роботи наукової фізико-математичної школи МЕГУ

Встановлюється функціональна залежність магнітного моменту планети Земля від геомагнітної широти. Дається вивід формули у вигляді поліному третього порядку.

Математична модель будується на основі способу найменших квадратів.

Проводиться дослідження точності зрівноважених елементів методом статистичних випробувань Монте Карло.

Для студентів і аспірантів напрямку наук про Землю.

Functional dependence of magnetic moment of planet is set Earth from a geomagnetical breadth. The conclusion of formula is given in a kind to the polynomial of the third order.

A mathematical model is built on the basis of method of leastsquares.

Research of exactness of the balanced elements is conducted by the method of statistical tests of Monte Karlo.

For students and graduate students of direction of sciences about Earth.

ЗМІСТ

Передмова.....	5
Розділ 1. Геомагнітний момент Землі.....	6
1.1. Представлення геомагнітного моменту поля Землі.....	6
1.2. Представлення істинної моделі.....	12
Розділ 2. Побудова спотвореної моделі.....	14
2.1. Генерування істинних похибок для дослідження математичної моделі методом статистичних випробувань Монте Карло.....	14
2.2. Представлення спотвореної моделі.....	16
Розділ 3. Зрівноваження моделі.....	17
3.1. Представлення системи нормальних рівнянь.....	17
3.2. Встановлення коефіцієнтів нормальних рівнянь.....	18
3.3. Рішення нормальних рівнянь способом Крамера	20
Розділ 4. Оцінка точності.....	26
4.1. Контроль зрівноваження	26
4.2. Оцінка точності параметрів, отриманих із системи нормальних рівнянь	26
Висновки.....	32
Літературні джерела	34
Додатки	36

Передмова

Безумовний науковий і практичний інтерес представляє дослідження геомагнітного поля Землі.

Вивченню природи геомагнітного поля і в наш час приділяється велика увага. Вчені намагаються отримати відповіді на запитання: коли і як зародилося магнітне поле земної кулі? Чому воно існує мільярди років? Як це поле буде змінюватись в майбутньому?

В даній роботі ми зробимо спробу виразити один із основних компонентів геомагнітного поля Землі магнітний момент планети графічно і встановити функціональну залежність магнітного моменту від широти.

Нами підбирається емпірична формула у вигляді поліному третього порядку. Математична модель будується на основі способу найменших квадратів. Побудована ймовірніша модель приймається як істинна модель, на основі якої проводяться дослідження точності методом статистичних випробувань Монте Карло. Генеруються псевдо випадкові числа, які приймаються як істинні похибки, якими спотворюється істинна модель.

В подальшому методом найменших квадратів урівноважується спотворена модель і робиться оцінка точності врівноважених елементів. Значення істинних похибок дає можливість зробити порівняльний аналіз. Набирається велика статистика шляхом побудови і дослідження великої кількості моделей.

Розроблена методика дозволить зробити попередній розрахунок точності при проектуванні майбутніх геомагнітних досліджень в будь-якій точці планети Земля.

Розділ 1. Геомагнітний момент Землі

1.1. Представлення геомагнітного моменту поля Землі

Магнітний момент – це векторна величина, яка характеризує земну кулю як джерело магнітного поля. Макроскопічні магнітні моменти створюють замкнуті електричні струми і впорядковано орієнтовані магнітні моменти атомних частинок.

Розрахуємо магнітний момент M Землі на екваторі при $\Phi_{\text{маг. Екв.}} = 0$.

При цьому спочатку розглянемо елементи земного магнетизму.

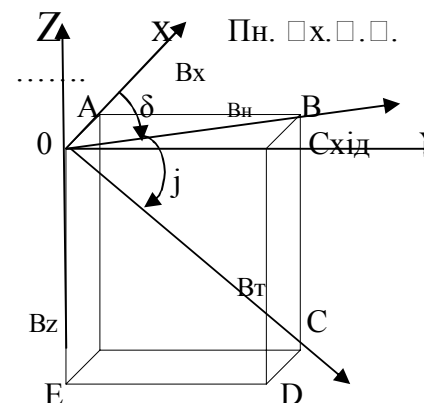


Рис.1.1. Елементи земного магнетизму

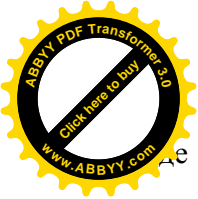
Проекції B_z і B_h індукції дипольного поля, або поля однорідного намагнічування Землі, можна знайти за допомогою формул.

Вертикальна складова геомагнітного поля Землі

$$B_z = \mu_0 \frac{M}{2\pi R^3} \sin \Phi_M \quad (1.1);$$

горизонтальна складова

$$B_h = \mu_0 \frac{M}{4\pi R^3} \cos \Phi_M \quad (1.2)$$



де μ_0 – магнітна стала;

M – магнітний момент земної кулі;

R – радіус Землі;

φ_M – геомагнітна широта, яка відрховується від геомагнітного екватора

Із приведених формул легко знайти модуль вектора індукції поля однорідного намагнічування Земної кулі:

$$\beta_T = \sqrt{B_Z^2 + B_H^2} \quad (1.3).$$

Підставляючи (1.1), (1.2) в (1.3), будемо мати:

$$\beta_T = \sqrt{\mu_0^2 \frac{M^2}{2\pi^2 R^6} \left(\sin^2 \varphi_M + \frac{\cos^2 \varphi_M}{4} \right)};$$

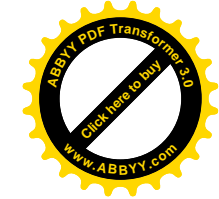
або:

$$\beta_T = \mu \frac{M}{2\pi R^3} \sqrt{\frac{4\sin^2 \varphi_M + \cos^2 \varphi_M}{4}}.$$

Приймаючи до уваги, що $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$, а $4\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 3\sin^2 \varphi + \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi$;

$$\beta_T = \mu \frac{M}{4\pi R^3} \sqrt{3\sin^2 \varphi + 1} \quad (1.4).$$

Знайдемо магнітний момент M із формули (1.4)



$$M = \frac{4\pi R^3 B_T}{\mu \sqrt{3\sin^2 \varphi_M + 1}} \quad (1.5).$$

Напруженість магнітного поля на магнітному екваторі $H_{\text{екв.}} = 0,34$ ерстеда [3, – с. 163].

Для переходу із системи СГСМ у систему СІ складемо слідууючу пропорцію

$$\text{Напруженості } 1 \frac{a}{M} \text{ відповідає } 4\pi \cdot 10^{-3} e, \\ H_{\text{екв.}} \text{ дорівнює } 0,34 e,$$

звідки

$$H_{\text{екв.}} = \frac{1 \frac{a}{M} \cdot 0,34 e}{4\pi \cdot 10^{-3} e} = 27,05634033 \frac{a}{M}.$$

В загальному випадку напруженість магнітного поля Землі можна розрахувати за формулою

$$H = \frac{B_T}{\mu_0} = \frac{M}{4\pi R^3} \sqrt{3\sin^2 \varphi_M + 1} \quad (1.6).$$

Тоді, загальна формула розрахунку магнітного моменту Землі буде

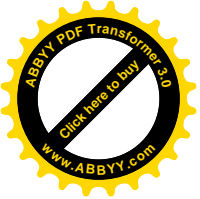
$$M = \frac{4\pi R^3 H}{\sqrt{1 + 3\sin^2 \varphi_M}}. \quad (1.7)$$

Для полюса $H_{\text{пол.}} = 0,66$ ерстед. Тоді, при переході до системи СІ

$$1 \frac{a}{M} \text{ відповідає } 4\pi \cdot 10^{-3} e,$$

$$H_{\text{пол.}} \text{ дорівнює } 0,66 e,$$

звідки



$$H_{\text{пол.}} = \frac{1 \frac{a}{m} \cdot 0,66e}{4\pi \cdot 10^{-3} e} = 52,52113122 \frac{a}{m}$$

Магнітний момент Землі біля полюсів

$$M_{\text{пол.}} = \frac{H_{\text{пол.}} \cdot 4\pi R^3}{\sqrt{1 + 3 \sin^2 90^\circ}}$$

Взявши радіус земної кулі $R=6371000\text{м}$, а $4\pi R^3=3,249620751 \cdot 10^{21} \text{ м}^3$, магнітний момент земної кулі на екваторі буде

$$M_{\text{екв.}} = \frac{3,249620751 \cdot 10^{21} [\text{м}^3] \cdot 27,05634033 \left[\frac{a}{m}\right]}{1} = 8,792284498 \cdot 10^{22} \text{ ам}^2$$

Розрахуємо магнітний момент земної кулі на полюсі

$$M_{\text{пол.}} = \frac{3,249620751 \cdot 10^{21} \cdot 52,52113122}{2} = 8,533687894 \cdot 10^{22} \text{ ам}^2$$

Розрахуємо магнітний момент Землі на широті 45° , прийнявши середнє значення напруженості

$$H_{45^\circ} = \frac{H_0 + H_{90^\circ}}{2} = \frac{0,34e + 0,66e}{2} = 0,50e$$

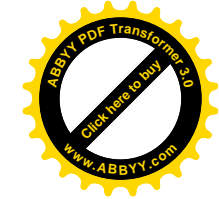
Тоді

$$1 \frac{a}{m} \text{ відповідає } 4\pi \cdot 10^{-3} e$$

$$H_{45^\circ} \text{ дорівнює } 0,5 e.$$

Звідки

$$H_{45^\circ} = \frac{1 \frac{a}{m} \cdot 0,5e}{4\pi \cdot 10^{-3} e} = 39,78873577 \frac{a}{m}$$



Таким чином, напруженість магнітного поля H_{45° буде

$$H_{45^\circ} = \frac{3,249620751 \cdot 10^{21} \text{ м}^3 \cdot 39,78873577 \frac{a}{m}}{\sqrt{1 + 3 \sin^2 45^\circ}}$$

$$H_{45^\circ} = 8,177542602 \cdot 10^{22} \text{ ам}^2$$

Знайдемо середню напруженість магнітного поля Землі для широти $22,5^\circ$

$$H_{22,5^\circ} = \frac{0,34e + 0,5e}{2} = 0,42 e,$$

для $\varphi_{\text{маг.}} = 67,5^\circ$

$$H_{67,5^\circ} = \frac{0,5e + 0,6e}{2} = 0,58e$$

для $\varphi_{\text{маг.}} = 22,5^\circ$

$$1 \frac{a}{m} \text{ відповідає } 4\pi \cdot 10^3 e$$

$$H_{22,5^\circ} \text{ дорівнює } 0,42 e$$

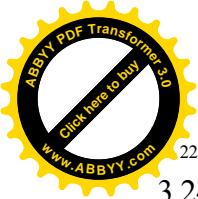
звідки

$$H_{22,5^\circ} = \frac{1 \frac{a}{m} \cdot 0,42e}{4\pi \cdot 10^3 e} = 33,422538 \frac{a}{m},$$

І по аналогії

$$H_{67,5^\circ} = \frac{1 \frac{a}{m} \cdot 0,58e}{4\pi \cdot 10^3 e} = 46,1549335 \text{ ам}^2.$$

Магнітні моменти будуть відповідно



$$M_{22,5^0} = \frac{3,249620751 \cdot 10^{21} \cdot 33,42253805}{\sqrt{1 + 3 \sin^2 22,5^0}} = 9,052956514 \cdot 10^{22} \text{ ам}^2,$$

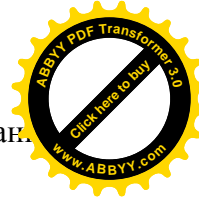
$$M_{67,5^0} = \frac{3,249620751 \cdot 10^{21} \cdot 46,1549335}{\sqrt{1 + 3 \sin^2 67,5^0}} = 7,948506716 \cdot 10^{22} \text{ ам}^2$$

Результати залежності геомагнітного моменту Землі від широти точки спостереження зведено в **Табл 1**.

Таблиця 1. Залежність геомагнітного моменту Землі від широти точки спостереження

№	$\varphi_{\text{маг.}} = X$	$Y = M = f(x) \left(\frac{a}{M}\right)$
1	0,00	$8,79 \cdot 10^{22}$ *
2	11,25	$8,9 \cdot 10^{22}$
3	22,5	$9,05 \cdot 10^{22}$
4	33,75	$8,5 \cdot 10^{22}$
5	45	$8,18 \cdot 10^{22}$
6	56,25	$8 \cdot 10^{22}$
7	67,5	$7,95 \cdot 10^{22}$
8	78,75	$8,12 \cdot 10^{22}$
9	90	$8,53 \cdot 10^{22}$
n=9		$\Sigma = 76,02 \cdot 10^{22}$

Згідно формули (1,7) магнітний момент залежить від напруженості магнітного поля і широти точки спостереження, тобто є функцією двох незалежних змінних, хоча в свою чергу напруженість геомагнітного поля також залежить від широти. На жаль, у нас немає формули залежності напруженості магнітного



поля від широти, що не потребувало б знання магнітного моменту і навпаки.

Тому безперечний інтерес представляє встановлення функціональної залежності магнітного моменту, як головного компонента для визначення складових геомагнітного поля Землі, від геомагнітної широти.

Примітка. В подальшому для спрощення викладок множник 10^{22} писати не будемо, але його слід мати на увазі, особливо при оцінці точності результатів.

1.2. Представлення істинної моделі

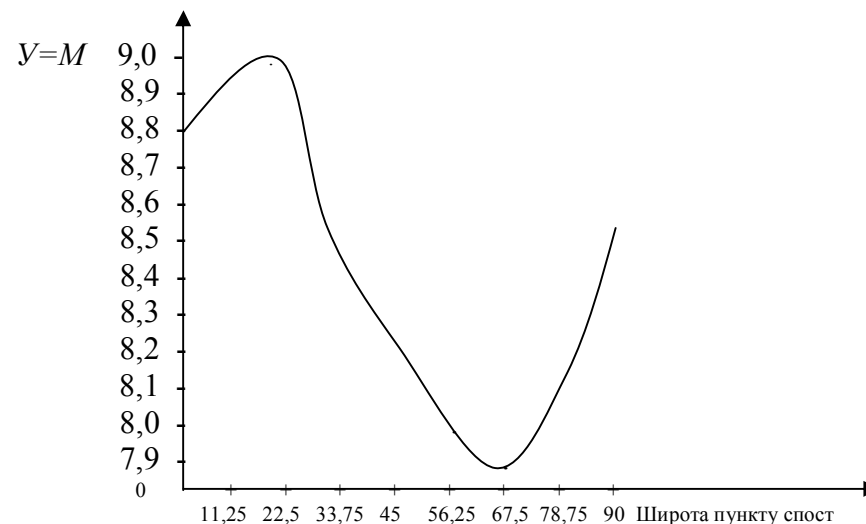
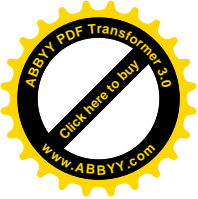


Рис. 1. Графік залежності магнітного моменту земної кулі від геомагнітної широти

Маючи вузлові точки значень геомагнітного моменту Землі в магнітних широтах $0, 22,5^0, 45^0, 67,5^0$ і 90^0 побудуємо точкову діаграму і графік, представлений на рис. 1.

Із цього графіка видно, що екстремум функції буде на широті $22,5^0$ і $67,5^0$. Як видно із графіка, кращою функцією для апроксимації буде кубічний поліном, тобто будемо шукати функціональну залежність у вигляді функції виду



$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (1.2.1)$$

Невідомі коефіцієнти a, b, c, d визначимо по способу найменших квадратів.

Проміжні точки в $11,25^0, 33,75^0, 56,25^0$ і $78,75^0$ визначимо безпосередньо із графіка. Цього нам буде цілком достатньо для побудови експериментальної моделі.

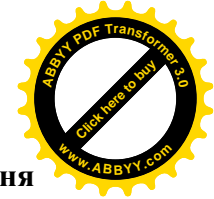
Побудовану таким чином експериментальну модель залежності магнітного моменту земної кулі від широти в подальшому зрівноважили і отримали формулу [7,с.38]

$$Y=M=1.2190*10^{-5} X^3 -1.4404*10^{-3} X^2 +2.8370*10^{-2}X+8,8028(1.2.2)$$

яку прийемо за істинну модель і, генеруючи істинні похибки будемо створювати спотворені моделі, на яких можна дослідити точність визначення магнітного моменту в залежності від похибки визначення широти.

Таблиця 2.Залежність геомагнітного моменту Землі від широти точки спостереження (істинна модель за формулою 1.1)

№	$\varphi_{\text{маг.}} = X$	$Y = M = f(x)\left(\frac{a}{M}\right)$
1	0	8,803
2	11,25	8,957
3	22,5	8,851
4	33,75	8,598
5	45	8,274
6	56,25	8,011
7	67,5	7,904
8	78,75	8,057
9	84,375	8,264
10	90	8,575
n=9	489,375	84,294



Розділ 2. Побудова спотвореної моделі

2.1. Генерування істинних похибок для дослідження математичної моделі методом статистичних випробувань Монте Карло

В роботі [1] істинна модель спотворювалась введенням істинних похибок в незалежні змінні X. В даній монографії істинні похибки будемо вводити в експериментальні параметри Y.

Приведемо методику розрахунку випадкових чисел, які прийемо в подальшому, як істинні похибки для побудови спотвореної моделі.

1. Отримавши ряд випадкових (а точніше псевдо-

$$\text{випадкових) чисел } \xi_{cp}, \quad \xi_{cp} = \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i}{n}, \quad (2.1.1)$$

Де n – сума випадкових чисел.

2. Розраховуються попередні значення істинних похибок Δ'_i за формулою

$$\Delta'_i = \xi_i - \xi_{cp} \quad (2.1.2)$$

3. Знаходять середню квадратичну похибку попередніх істинних похибок за формулою Гауса

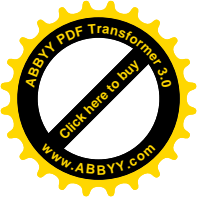
$$m_{\Delta'} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \Delta'^2_i}{n}} \quad (2.1.3)$$

4. Знаходять коефіцієнт пропорційності K, для визначення істинних похибок необхідності точності

$$K = \frac{c}{m'_{\Delta}}, \quad (2.1.4)$$

де c – необхідна константа.

Так, наприклад, при $m'_{\Delta} = 0,28$ і необхідності побудови математичної моделі з точністю $c = 0,1$, будемо мати



$K_{0,1} = \frac{0,1}{0,28} = 0,357$, а при $c = 0,05$, отримаємо

$$K = \frac{0,05}{0,28} = 0,178.$$

5. Істинні похибки розраховуються за формулою

$$\Delta_i = \Delta'_i \cdot K \quad (2.1.5)$$

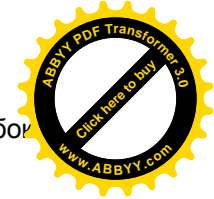
6. Заключним контролем служить розрахунок середньої квадратичної похибки m_{Δ} генерованих істинних похибок Δ

$$m_{\Delta} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \Delta^2}{n}} \quad (2.1.6)$$

і порівняння $m_{\Delta} = c \quad (2.1.7)$

Таблиця 3. Генерування псевдо-випадкових чисел і розрахунок істинних похибок

№	ξ_i	ξ_{cp}	$\Delta'_i = \xi_i - \xi_{cp}$	$\Delta_i'^2$	$\Delta_i = \Delta'_i \cdot K$	Δ_i^2
1	0,44	0,52	-0,08	0,00640	-0,0352	0,00123791
2	0,58	0,52	0,06	0,00360	0,02639	0,00069632
3	0,64	0,52	0,12	0,01440	0,05278	0,00278530
4	0,11	0,52	-0,41	0,16810	-0,1803	0,03251451
5	0,66	0,52	0,14	0,01960	0,06157	0,00379110
6	0,68	0,52	0,16	0,02560	0,07037	0,00495164
7	0,7	0,52	0,18	0,03240	0,07916	0,00626692
8	0,86	0,52	0,34	0,11560	0,14953	0,02235977
9	0,24	0,52	-0,28	0,07840	-0,1231	0,01516441
10	0,29	0,52	-0,23	0,05290	-0,1012	0,01023211
n=10	5,2	5,2	-1E-15	0,51700	-6,4E-16	0,10000000



Середня квадратична похибка попередніх істинних похибок

$$\Delta'_o = \sqrt{\frac{0,51700}{10}} = 0,227376$$

Коефіцієнт пропорційності $K = \frac{0,1}{0,227376} = 0,4398$

Середня квадратична похибка при генеруванні випадкових чисел з точністю $c = 0,1$

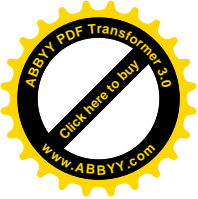
$$m_{\Delta_i} = \sqrt{\frac{0,1000000}{10}} = 0,1$$

2.2. Представлення спотвореної моделі

Таблиця 4. Побудова спотвореної моделі

№	Істинна модель		Δ_i	$Y_{спотв.} = Y_{icm.} + \Delta_i$
	x_{icm}	y_{icm}		
1	0	8,803	-0,0352	8,768
2	11,25	8,957	0,02639	8,983
3	22,5	8,851	0,05278	8,9038
4	33,75	8,598	-0,1803	8,4177
5	45	8,274	0,06157	8,3356
6	56,25	8,011	0,07037	8,0814
7	67,5	7,904	0,07916	7,9832
8	78,75	8,057	0,14953	8,2065
9	84,375	8,264	-0,1231	8,1409
10	90	8,575	-0,1012	8,4738
	489,375	84,294	-6,4E-16	84,294

По даним спотвореної моделі виконують строге зрівноваження методом найменших квадратів і отримують ймовірнішу модель, роблять оцінку точності зрівноважених елементів і дають порівняльний аналіз.



Розділ 3. Зрівноваження моделі

3.1. Представлення системи нормальних рівнянь

У результаті проведеного експерименту ми маємо ряд результатів X_i, V_i , функціональну залежність між якими будемо шукати за допомогою поліному степені K , де коефіцієнти a_i являються невідомими.

$$\begin{aligned}
 & \text{Тоді, система нормальних рівнянь буде} \\
 & na_0 + a_3[x] + a_2[x^2] + \dots + a_m[x^m] - [y] = 0, \\
 & a_0[x] + a_3[x^2] + a_2[x^3] + \dots + a_m[x^{m+1}] - [xy] = 0, \\
 & a_0[x^2] + a_1[x^3] + a_2[x^4] + \dots + a_m[x^{m+1}] - [x^2y] = 0, \quad (3.1.1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \dots \\
 & a_0[x^m] + a_1[x^{m+1}] + a_2[x^{m+2}] + \dots + a_m[x^{2m}] - [x^m y] = 0,
 \end{aligned}$$

де знаком [] позначена сума відповідного елемента.

Для поліному третього порядку виду

$$y = ax^3 + vx^2 + cx + d \quad (3.1.2)$$

Система нормальних рівнянь буде

$$\begin{aligned}
 & dn + c[x] + v[x^2] + a[x^3] - [y] = 0, \\
 & d[x] + c[x^2] + v[x^3] + a[x^4] - [xy] = 0, \\
 & d[x^2] + c[x^3] + v[x^4] + a[x^5] - [x^2y] = 0, \\
 & d[x^3] + c[x^4] + v[x^5] + a[x^6] - [x^3y] = 0.
 \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

або

$$\begin{aligned}
 & a[x^6] + v[x^5] + c[x^4] + d[x^3] - [x^3y] = 0, \\
 & a[x^5] + v[x^4] + c[x^3] + d[x^2] - [x^2y] = 0, \\
 & a[x^4] + v[x^3] + c[x^2] + d[x] - [xy] = 0, \\
 & a[x^3] + v[x^2] + c[x] + dn - [y] = 0.
 \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

В подальшому будемо рішати систему лінійних нормальних рівнянь (3.1.3) або (3.1.4) одним із відомих в математиці способів.

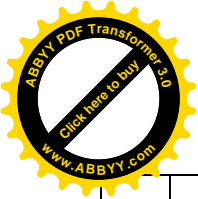


3.2. Встановлення коефіцієнтів нормальних рівнянь

Приведемо розрахункову таблицю, на основі якої стримують коефіцієнти нормальних рівнянь.

Таблиця 5. Розрахунок коефіцієнтів нормальних рівнянь

№	$x_{i\text{стн.}}$	$y_{i\text{номн.}}$	x^0	x^2	x^3	x^4	x^5
1	0	8,768	1	0	0	0	0
2	11,25	8,983	1	126,563	1423,828	16018,066	180203,247
3	22,5	8,9038	1	506,250	11390,625	256289,063	5766503,906
4	33,75	8,4177	1	1139,063	38443,359	1297463,379	43789389,038
5	45	8,3356	1	2025,000	91125,000	4100625,000	184528125,000
6	56,25	8,0814	1	3164,063	177978,516	10011291,504	563135147,095
7	67,5	7,9832	1	4556,250	307546,875	20759414,063	1401260449,219
8	78,75	8,2065	1	6201,563	488373,047	38459377,441	3028675973,511
9	84,375	8,1409	1	7119,141	600677,490	50682163,239	4276307523,251
10	90	8,4738	1	8100,000	729000,000	65610000,000	5904900000,000
Σ	489,375	84,294	10	32937,891	2445958,740	191192641,754	15408543314,266

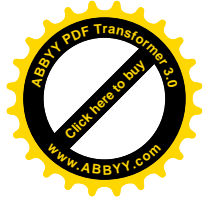


Продовження таблиці 5

№	x^6	xy	x^2y	x^3y
1	0	0	0	0
2	2027286,530	101,063115	1136,96	12790,80045
3	129746337,891	200,334959	4507,537	101419,5728
4	1477891880,035	284,096774	9588,266	323603,9822
5	8303765625,000	375,100737	16879,53	759578,9921
6	31676352024,078	454,576945	25569,95	1438309,867
7	94585080322,266	538,863564	36373,29	2455197,113
8	238508232913,971	646,264382	50893,32	4007848,954
9	360813447274,268	686,884737	57955,9	4890029,035
10	531441000000,000	762,64615	68638,15	6177433,818
Σ	1266937543664,040	4049,831	271542,9	20166212,1

Таким чином, на основі проведених розрахунків нами отримана наступна матриця коефіцієнтів нормальних рівнянь

10,0	489,4	32937,9	2445958,7
489,4	32937,9	2445958,7	191192641,8
32937,9	2445958,7	191192641,8	15408543314,3
2445958,7	191192642	15408543314,3	1266937543664,0



3.3. Рішення системи лінійних рівнянь способом Крамера

Нехай, маємо систему лінійних рівнянь

$$\begin{aligned}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\
 \dots & \\
 a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n.
 \end{aligned}
 \tag{3.3.1}$$

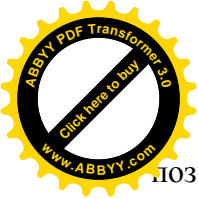
Для того, щоб із цієї системи визначити невідомі s , складемо із коефіцієнтів при невідомих визначник Δ , який називається визначником системи рівнянь (3.3.1).

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}
 \tag{3.3.2}$$

Помножимо ліву і праву частини рівності (3.3.2) на x_i . В лівій частині будемо мати Δx_i , в правій же частині введемо у всі члени i -го стовпчика визначника a_k і множник x_i

$$\Delta \cdot x_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i}x_i \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i}x_i \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni}x_i \dots a_{nn} \end{vmatrix}
 \tag{3.3.3}$$

Потім до i -го стовпчика визначника (3.3.3) додамо всі інші стовпчики, помножені відповідно на x_1, x_2, \dots, x_n . Величина визначника від цього не зміниться. Тоді i -стовпчик представить собою ліву частину системи рівнянь (3.3.1).



Замінімо його вільними членами цієї системи і позначимо через Δ_i

$$\Delta \cdot x_i = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \dots a_{nn} \end{vmatrix} \quad (3.3.4)$$

$$\text{Звідки, } x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \dots a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \dots a_{nn} \end{vmatrix}}. \quad (3.3.5)$$

Формула (3.3.5) дає можливість визначити кожне невідоме системи лінійних рівнянь (3.3.1).

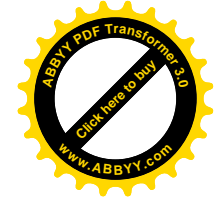
Якщо вільні члени системи лінійних рівнянь рівні нулю, то вона буде системою лінійних однокорінних рівнянь.

Система лінійних одно корінних рівнянь може мати рішення відмінне від нульового, якщо визначник системи Δ рівний нулю.

Для системи чотирьох лінійних рівнянь

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= b_3, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 &= b_4, \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

якщо визначник системи Δ не дорівнює нулю



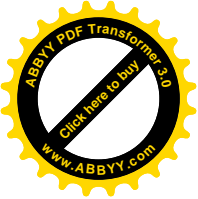
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \neq 0, \quad (3.3.7)$$

то система визначника і по Крамеру її невідомі виражаються формулами

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ b_4 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad (3.3.8)$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & b_4 & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad (3.3.9)$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & b_2 & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & b_3 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & b_4 & a_{44} \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad (3.3.10)$$



$$x_4 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & b_4 \end{vmatrix}}{\Delta} \quad (3.3.11)$$

Як бачимо, що

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ b_4 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad (3.3.12)$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & b_3 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & b_4 & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad (3.3.13)$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & b_2 & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & b_3 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & b_4 & a_{44} \end{vmatrix}, \quad (3.3.14)$$

$$\Delta_{x_4} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & b_4 \end{vmatrix}. \quad (3.3.15)$$



Приведемо формулу знаходження визначника четвертого порядку

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = (a_{23}a_{43} - a_{33}a_{42})(a_{11}a_{24} - a_{14}a_{21}) + \\ + (a_{32}a_{44} - a_{34}a_{42})(a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23}) + (a_{31}a_{43} - a_{33}a_{41})(a_{14}a_{22} - a_{12}a_{24}) + \\ + (a_{31}a_{42} - a_{32}a_{41})(a_{13}a_{24} - a_{14}a_{23}) + (a_{33}a_{44} - a_{34}a_{43})(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) + \\ + (a_{31}a_{44} - a_{34}a_{41})(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}). \quad (3.3.16)$$

І в нашому випадку визначник системи D = 1,38204E+21

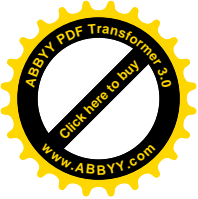
1266937543664,04	15408543314,27	191192642	2445959
15408543314,266	191192642	2445959	32937,891
191192641,754	2445959	32938	489
2445958,740	32938	489	10

20166212,1340	15408543314	191192642	2445959
271542,91291	191192642	2445959	32938
4049,8313628	2445959	32938	489
84,294000000	32938	489	10
D1=	1,32287E+16		

тоді невідомий коефіцієнт a при x³ буде

$$a = x_1 = \frac{D1}{D} = \frac{1.32287E + 16}{1.38204E + 21} = 0,000009572;$$

1266937543664	20166212,134	191192642	2445959
15408543314	271542,913	2445959	32938
191192642	4049,831	32938	489,375
2445959	84,2940	489,375	10
D2=	-1,5590E+18		



тоді невідомий коефіцієнт b при x^2 буде

$$b = x_2 = \frac{D2}{D} = \frac{-1.5590E + 18}{1.38204E + 21} = -0,001128;$$

1266937543664	15408543314	20166212	2445958,7
15408543314	191192642	271543	32937,891
191192642	2445959	4050	489,375
2445959	32938	84,294	10
D3=	2,7866E+19		

і невідомий коефіцієнт c при x буде

$$c = x_3 = \frac{D3}{D} = \frac{2.7866E + 19}{1.38204E + 21} = 0,020163;$$

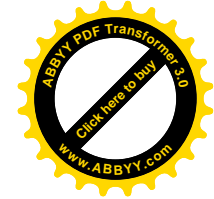
1266937543664	15408543314	191192642	20166212
15408543314	191192642	2445959	271543
191192642	2445959	32938	4050
2445959	32938	489,375	84,294
D4=	1,2186E+22		

коефіцієнт d буде

$$d = \frac{D4}{D} = \frac{1,2186E + 22}{1.38204E + 21} = 8,817066.$$

Таким чином, на основі проведених досліджень, математична модель залежності магнітного моменту планети Земля y_i від широти пункту спостереження x_i виражається формулою

$$\delta' = 0,000009572\delta^3 - 0,001128\delta^2 + 0,020163\delta + 8,817066. \quad (3.3.17)$$



Розділ 4. Оцінка точності

4.1. Контроль зрівноваження

Підставляючи отримані значення коефіцієнтів a, b, c, d у формулу (3.4), отримаємо наступні результати.

Таблиця 6. Коефіцієнти нормальних рівнянь і контроль зрівноваження

	x^3	x^2	x	x^0	y	Контроль
x^3	1266937543664,04	15408543314,27	191192642	2445959	20166212,13	20166212,134
x^2	15408543314,266	191192642	2445959	32937,891	271542,913	271542,913
x	191192641,754	2445959	32938	489	4049,831	4049,831
x^0	2445958,740	32938	489	10	84,294	84,294
	0,000009572	-0,001128	0,020163	8,817066		
	Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.	b	c	d		

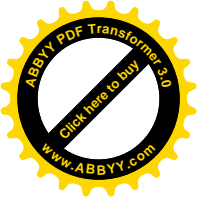
$$[YY] - d[YYX^3] - b[YYX^2] - c[YYX] - d[YY] -$$

$$= 0,067610801. \quad \text{З другої сторони } [VV] = 0,067611$$

4.2. Оцінка точності параметрів, отриманих із рішення системи нормальних рівнянь

Середні квадратичні похибки визначаємих x_1, x_2, x_3, x_4 розраховуються за формулами:

$$m_{x_1} = \mu \sqrt{\frac{A_{11}}{D}}, \quad (4.2.1)$$



$$m_{x_2} = \mu \sqrt{\frac{A_{22}}{D}}, \quad (4.2.2)$$

$$m_{x_3} = \mu \sqrt{\frac{A_{33}}{D}}, \quad (4.2.3)$$

$$m_{x_4} = \mu \sqrt{\frac{A_{44}}{D}}, \quad (4.2.4)$$

де $m_{x_1}, m_{x_2}, m_{x_3}, m_{x_4}$ – середні квадратичні похибки визначаємих невідомих x_1, x_2, x_3, x_4 , μ – середня квадратична похибка одиниці ваги, яка розраховується за формулою

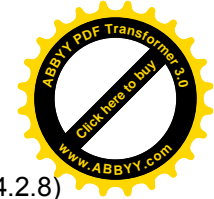
$$\mu = \sqrt{\frac{[VV]}{n - K}} \quad (4.2.5)$$

У формулі (4.2.5) n - число початкових рівнянь, K - число невідомих. В нашому випадку $n = 10; K = 4$. V - різниця між вихідним значенням y_i і вирахованим значенням y' за отриманою нами формулою (3.3.17);

$$V_i = y_i - y'_i \quad (4.2.6)$$

$A_{11}, A_{22}, A_{33}, A_{44}$ – алгебраїчні доповнення першого, другого, третього і четвертого діагональних елементів

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad (4.2.7)$$



$$A_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad (4.2.8)$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad (4.2.9)$$

$$A_{44} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad (4.2.10)$$

$$\text{де } \Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}. \quad (4.2.11)$$

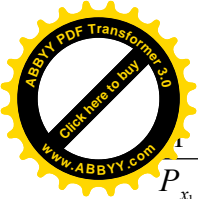
Приведемо формулу розкриття визначника третього порядку

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}). \quad (4.2.12)$$

І в нашому випадку отримаємо

	19119264		
	2	2445959	32938
A11=	4,7761E+11	2445959	32938
		32937,891	489,375
			10

величина оберненої ваги



$$\frac{1}{P_{x_1}} = \frac{A_{11}}{D} = \frac{4.7761E + 11}{1,38204E + 21} = 3.45593E - 10, a$$

$$\sqrt{\frac{1}{P_{x_{11}}}} = 0,00001859.$$

			19119264	
		1266937543664	2	2445959
A22=	8,99382E+15	191192642	32938	489,375
		2445959	489	10

$$\frac{1}{P_{x_2}} = \frac{A_{22}}{D} = \frac{8,99382E + 15}{1.38204E + 21} = 0,000006508; \sqrt{\frac{1}{P_{x_{22}}}} = 0,00255.$$

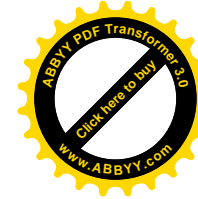
A33=	1,24719E+19	1266937543664	15408543314	2445959
		15408543314	191192642	32938
		2445959	32938	10

$$\frac{1}{P_{x_3}} = \frac{A_{33}}{D} = \frac{1,24719E + 19}{1.38204E + 21} = 0,00902; \sqrt{\frac{1}{P_{x_{33}}}} = 0,0950.$$

			1266937543664	15408543314	19119264
					2
A44=	1.1858101E+2		15408543314	191192642	2445959
			191192642	2445959	32938

$$\frac{1}{P_{x_4}} = \frac{A_{44}}{D} = \frac{1,1858101E + 21}{1.38204E + 21} = 0,8580; \sqrt{\frac{1}{P_{x_{44}}}} = 0,9263.$$

Підставляючи у виведену нами, формулу (3.3.17) значення X спотвореної моделі отримаємо розрахункові значення y' , які будуть дещо відрізнятись від вихідних значень Y .



Таблиця 6. порівняльний аналіз результатів строгого зрівноваження

№	$x_{істн.}$	$y_{спотв.}$	$y'_{зрівноваж}$	$V = y_i - y'_i$	V^2
1	0	8,768	8,8170658	-4,925E-02	0,002425537
2	11,25	8,983	8,9147561	6,863E-02	0,004710337
3	22,5	8,9038	8,8086747	9,510E-02	0,009044239
4	33,75	8,4177	8,5805944	-1,629E-01	0,026540382
5	45	8,3356	8,3122877	2,328E-02	0,000542156
6	56,25	8,0814	8,0855272	-4,159E-03	1,72996E-05
7	67,5	7,9832	7,9820856	1,078E-03	1,16278E-06
8	78,75	8,2065	8,0837355	1,228E-01	0,015078949
9	84,375	8,1409	8,2370236	-9,617E-02	0,009248189
10	90	8,4738	8,4722494	1,597E-03	2,54938E-06
$n=10$	489,375	84,294	84,29	0,0000000	0,067611

Тоді, середня квадратична похибка одиниці ваги буде

$$\mu = \sqrt{\frac{[VV]}{n - K}} = 0,106153035$$

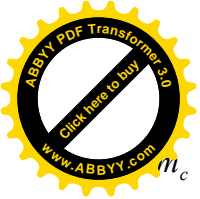
Середня квадратична похибка визначення коефіцієнта a

$$m_a = \mu \sqrt{\frac{1}{P_a}} = 0,106153035 * 0,00001859 = 1,97337E-06$$

Середня квадратична похибка визначення коефіцієнта b

$$m_b = \mu \sqrt{\frac{1}{P_b}} = 0,106153035 * 0,00255 = 0,000270798$$

Середня квадратична похибка визначення коефіцієнта c



$$m_c = \mu \sqrt{\frac{1}{P_c}} = 0,106153035 * 0,0950 = 0,010084163$$

Середня квадратична похибка визначення коефіцієнта d

$$m_d = \mu \sqrt{\frac{1}{P_d}} = 0,106153035 * 0,9263 = 0,098328703.$$

Середні квадратичні похибки зрівноваженої функції $m\varphi=$

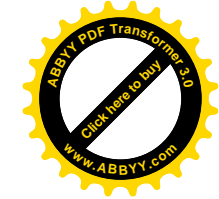
0,0983287
0,06081151
0,0646249
0,05937304
0,053641
0,05926879
0,06307151
0,05375924
0,05764571
0,08616572

Перевірка моделі на адекватність за критерієм Фішера

Перевірка на адекватність за критерієм Фішера		
30,85149	>	4,533677
Модель адекватна експериментальним даним		

Встановлення значимості коефіцієнтів регресії

Коефіцієнти регресії значимі			
ta=	4,850535	t(0,05;6)=	2,446912
tb=	4,165753		
tc=	1,999471	t(0,08;6)=	2,104306
td=	89,6693		



Висновки

На основі проведених досліджень в даній роботі:

1. Генеровані випадкові числа, які приведено до нормованої досліджуваної точності.

2. На основі істинної моделі і генерованих істинних похибок побудована спотворена модель залежності магнітного моменту Землі від широти.

3. Математична модель апроксимована по способу найменших квадратів кубічним поліномом.

4. Отримана формула

$$y' = 0,000009572x^3 - 0,001128x^2 + 0,020163x + 8,817066.$$

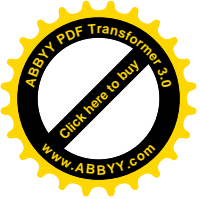
залежності магнітного моменту Землі Y від широти X .

5. Встановлено, що середня квадратична похибка одиниці ваги за результатами зрівноваження складає $\mu = 0,122513676 * 10^{22}$ ам².

6. Середня квадратична похибка визначення коефіцієнта a при x^3 $m_a = 1,97337E - 06$;

- середня квадратична похибка визначення коефіцієнта b при x^2 $m_b = 0,000270798$;

- середня квадратична похибка визначення коефіцієнта c при x $m_c = 0,010084163$;

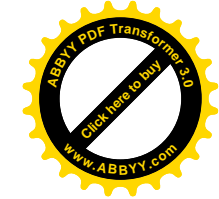


- середня квадратична похибка визначення коефіцієнта d при $m_d = 0,098328703$.

середні квадратичні похибки зрівноваженої функції $m_f =$

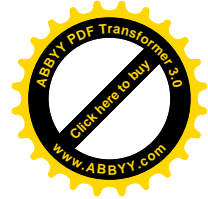
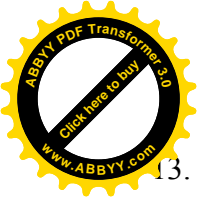
0,0983287
0,06081151
0,0646249
0,05937304
0,053641
0,05926879
0,06307151
0,05375924
0,05764571
0,08616572

7. Розроблена методика підготовки істинних похибок наперед заданої точності.
8. Дана робота відкриває дорогу для проведення досліджень методом статистичних випробувань Монте Карло.
9. Вона дає можливість охопити велику аудиторію, тому що генеруються похибки індивідуально і вони не повторюються в других моделях.
10. Робота виконується вперше. Нам не відомі літературні джерела, де б виконувались аналогічні дослідження в курсі Фізика з основами геофізики.



Літературні джерела

1. Букеєв Б.О. Дослідження точності апроксимації залежності магнітного моменту Землі від широти методом статистичних випробувань Монте Карло. Модель ПГБ 61-.МЕГУ, Рівне, 2006, -29с.
2. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. – М.: Наука, 1973,-831с.
3. Кошкин Н. И., Ширкевич М. Г. Справочник по элементарной физике. – М.: Наука, 1972,-255с.
4. Кучерук І. М., Горбачук І. Т., Луцик П. П. Загальний курс фізики. Т. 1. – К.: Техніка, 1999,-536с.
5. Кучерук І. М., Горбачук І. Т., Луцик П. П. Загальний курс фізики. Т. 2. – К.: Техніка, 1999,-452с.
6. Кучерук І. М., Горбачук І. Т. Загальний курс фізики. Т.3 . – К.: Техніка, 1999,-520с.
7. Літнарівич Р. М. Дослідження точності апроксимації залежності магнітного моменту Землі від широти методом статистичних випробувань Монте Карло. Частина 1. МЕГУ, Рівне, 2006,-44с.
8. Літнарівич Р.М. Встановлення зв'язку між географічною і геомагнітною системами координат. Частина 2.МЕГУ,Рівне,2006,-47с.
9. Літнарівич Р.М. Фізика з основами геофізики. Курс лекцій.МЕГУ,Рівне,2007,-78с.
10. Літнарівич Р.М. Фізика з основами геофізики. Лабораторний практикум. Частина 1.МЕГУ,Рівне,2007,-44с.
11. Літнарівич Р.М. Фізика з основами геофізики. Лабораторний практикум. Частина 2.МЕГУ,Рівне,2008,-48с.
12. Мудров В. И., Кушко В. Л. Методы обработки



измерений. – М.: Сов. радио, 1976,-192с.

13. Пастушенко С. М. Формули і закони загальної фізики: навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів. 2е вид.: Діал., 2005,-2668с.
14. Рего К. Г. Метрологическая обработка результатов технических измерений. Справочное пособие. – К.:Техніка, 1987,-126с.
15. Розв'язування задач з курсу загальної фізики. Практикум/Остроухов А. А., Стрижевський В. Л., Цвілих М. Г. та інші. –К.: Радянська школа, 1966,-503с
16. Савельев И. В. Курс физики. Т.1. –М.:Наука, 1989,-352с
17. Савельев И. В. Курс физики. Т.2. –М.:Наука, 1989,-464с
18. Савельев И. В. Курс общей физики. –М.:Наука, 1982, - 304с
19. Ситніков О. П. Основи електродинаміки. Лабораторний практикум. Чернігів: ЧДІЕіУ, 2003,-48с
20. Суботін С. І. Кора і мантия Землі. –К.: Знання,1996, -39с.
21. Топографо-геодезические термины: справочник/ Кузьмин Б. С., Герасимов Ф. Я., Молоканов В. М. и др. – М.: Недра, 1989,-261с.
22. Федоров Є. П. Обертання Землі. – К.:Знання, 1966,-52с
23. Фізика з використанням обчислювальної техніки. Практичний курс/ В. М. Казанський, В. І. Кланченко, Д. Кошелева та ін. – К.: Либідь, 1993,-224с.

Додатки

Додаток 1.

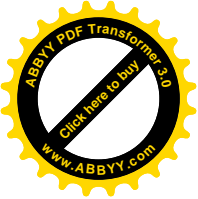
Генерування псевдовипадкових чисел, підпорядкування їх нормальному закону розподілу і розрахунок істинних похибок

0,44	0,52	-0,08	0,00640	-0,0352	0,00123791
0,58	0,52	0,06	0,00360	0,02639	0,00069632
0,64	0,52	0,12	0,01440	0,05278	0,00278530
0,11	0,52	-0,41	0,16810	-0,1803	0,03251451
0,66	0,52	0,14	0,01960	0,06157	0,00379110
0,68	0,52	0,16	0,02560	0,07037	0,00495164
0,7	0,52	0,18	0,03240	0,07916	0,00626692
0,86	0,52	0,34	0,11560	0,14953	0,02235977
0,24	0,52	-0,28	0,07840	-0,1231	0,01516441
0,29	0,52	-0,23	0,05290	-0,1012	0,01023211
5,2	5,2	-1E-15	0,51700	-6,4E-16	0,10000000
A	B	C	D	E	F

Додаток 2.

Побудова спотвореної моделі

0	8,803	-0,0352	8,768
11,25	8,957	0,02639	8,983
22,5	8,851	0,05278	8,9038
33,75	8,598	-0,1803	8,4177
45	8,274	0,06157	8,3356
56,25	8,011	0,07037	8,0814
67,5	7,904	0,07916	7,9832
78,75	8,057	0,14953	8,2065
84,375	8,264	-0,1231	8,1409
90	8,575	-0,1012	8,4738
489,375	84,294	-6,4E-16	84,294
I	G	E	H



Хексп.=Хістн.	Уістн.	Істинні похиб.	Усптв.

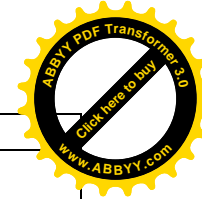
Додаток 3.

Розрахункова таблиця

0	1	0	0	0	0	0
11,25	1	126,563	1423,828	16018,066	180203,247	2027286,530
22,5	1	506,250	11390,625	256289,063	5766503,906	129746337,891
33,75	1	1139,063	38443,359	1297463,379	43789389,038	1477891880,035
45	1	2025,000	91125,000	4100625,000	184528125,000	8303765625,000
56,25	1	3164,063	177978,516	10011291,504	563135147,095	31676352024,078
67,5	1	4556,250	307546,875	20759414,063	1401260449,219	94585080322,266
78,75	1	6201,563	488373,047	38459377,441	3028675973,511	238508232913,971
84,375	1	7119,141	600677,490	50682163,239	4276307523,251	360813447274,268
90	1	8100,000	729000,000	65610000,000	5904900000,000	531441000000,000
489,375	10	32937,891	2445958,740	191192641,754	15408543314,266	1266937543664,040
0	1	0	0	0	0	0
Хексп.=Хістн.	X0	X^2	X^3	X^4	X^5	X^6

Продовження розрахункової таблиці

0	0	0	8,8170658	-4,925E-02	0,002425537
101,063115	1136,96	12790,80045	8,9147561	6,863E-02	0,004710337
200,334959	4507,537	101419,5728	8,8086747	9,510E-02	0,009044239
284,096774	9588,266	323603,9822	8,5805944	-1,629E-01	0,026540382
375,100737	16879,53	759578,9921	8,3122877	2,328E-02	0,000542156
454,576945	25569,95	1438309,867	8,0855272	-4,159E-03	1,72996E-05
538,863564	36373,29	2455197,113	7,9820856	1,078E-03	1,16278E-06
646,264382	50893,32	4007848,954	8,0837355	1,228E-01	0,015078949
686,884737	57955,9	4890029,035	8,2370236	-9,617E-02	0,009248189
762,64615	68638,15	6177433,818	8,4722494	1,597E-03	2,54938E-06
4049,831	271542,9	20166212,1	84,29	0,0000000	0,067611
P	Q	R	S	T	U

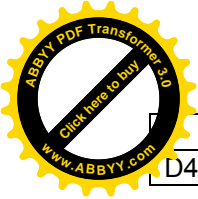


YX	YX^2	YX^3	Y^зрівн.	V=Усптв.- Yз	VV

Додаток 4.

Розрахунок визначників

1266937543664,04	15408543314,27	191192642	2445959
15408543314,266	191192642	2445959	32937,891
191192641,754	2445959	32938	489
2445958,740	32938	489	10
D=	1,38204E+21		
20166212,1340	15408543314	191192642	2445959
271542,91291	191192642	2445959	32938
4049,8313628	2445959	32938	489
84,294000000	32938	489	10
D1=	1,32287E+16		
1266937543664	20166212,134	191192642	2445959
15408543314	271542,913	2445959	32938
191192642	4049,831	32938	489,375
2445959	84,2940	489,375	10
D2=	-1,5590E+18		
1266937543664	15408543314	20166212	2445958,7
15408543314	191192642	271543	32937,891
191192642	2445959	4050	489,375
2445959	32938	84,294	10
D3=	2,7866E+19		
1266937543664	15408543314	191192642	20166212
15408543314	191192642	2445959	271543
191192642	2445959	32938	4050
2445959	32938	489,375	84,294



D4=	1,2186E+22		
-----	------------	--	--

Додаток 5.

Вільні члени нормальних рівнянь

20166212,13
271542,913
4049,831
84,294

Додаток 6.

Розрахунок коефіцієнтів апроксимуючого поліному

a=D1/D=	0,000009572
b=D2/D=	-0,001128
c=D3/D=	0,020163
d=D4/D=	8,817066
Y=aX^3+bX^2+cX+d	

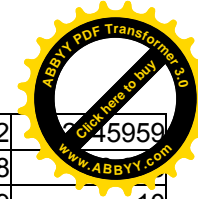
Нами виведена формула за результатами теоретичних досліджень:

$$\delta' = 0,000009572\delta^3 - 0,001128\delta^2 + 0,020163\delta + 8,817066.$$

Додаток 7.

Знаходження алгебраїчних доповнень

		1266937543664	15408543314	191192642
A44=	1,1858101,E+21	15408543314	191192642	2445959
		191192642	2445959	32938



		1266937543664	191192642	2445959
A22=	8,99382E+15	191192642	32938	2445959
		2445959	489	10

A33=	1,24719,E+19	1266937543664	15408543314	2445959
		15408543314	191192642	32938
		2445959	32938	10

		191192642	2445959	32938
A11=	4,7761E+11	2445959	32938	489,375
		32937,891	489,375	10

Додаток 8.

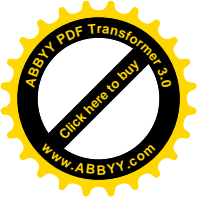
Контроль зрівноваження

[yy]-	a[yx^3]-	b[yx^2]	- c[yx] -	d[y]	=	0,067610801
					[VV] =	0,067610801
					Різниця=	0,000000

Додаток 9.

Оцінка точності зрівноважених елементів

Середня квадратична похибка одиниці ваги	
μ =	0,106153035
Середня квадратична похибка коефіцієнта а	
ma=	1,97337E-06
Середня квадратична похибка коефіцієнта в	
mb=	0,000270798
Середня квадратична похибка коефіцієнта с	
mc=	0,010084163
Середня квадратична похибка коефіцієнта d	
md=	0,098328703

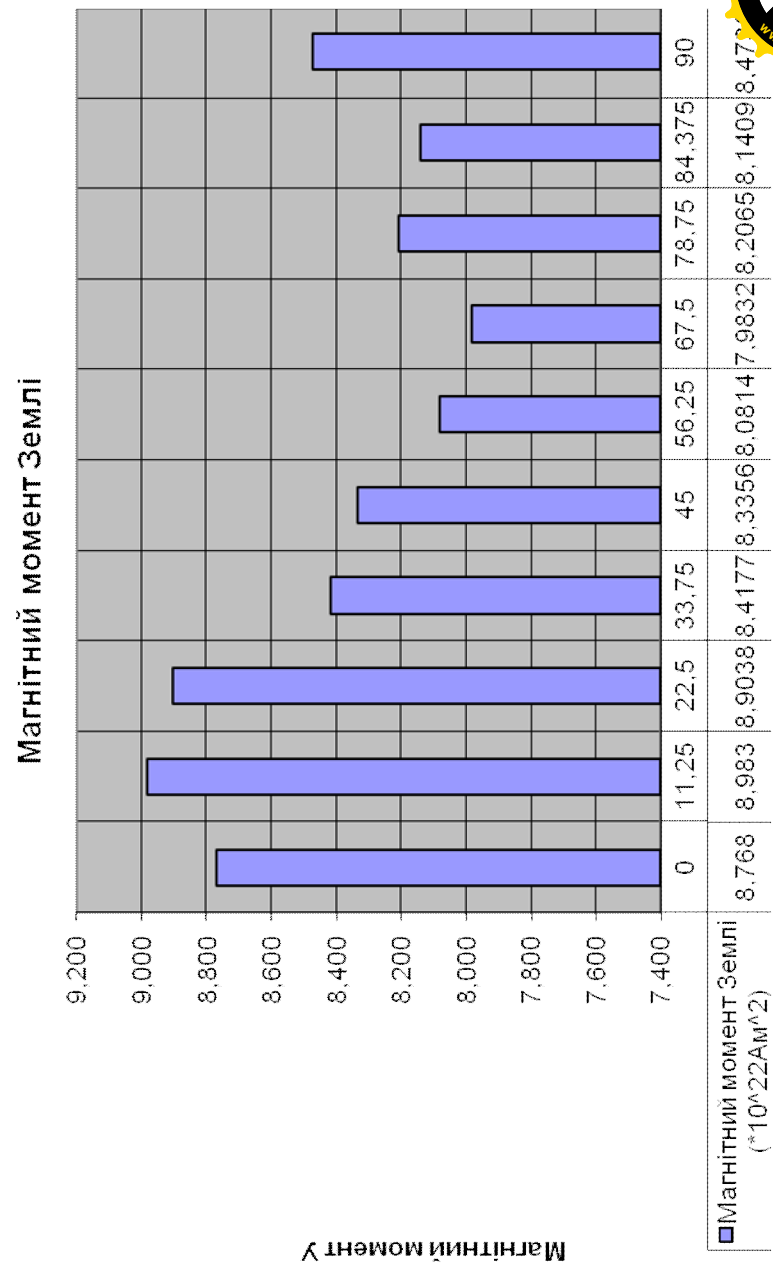
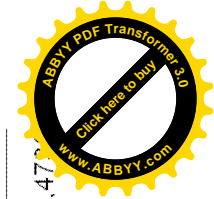


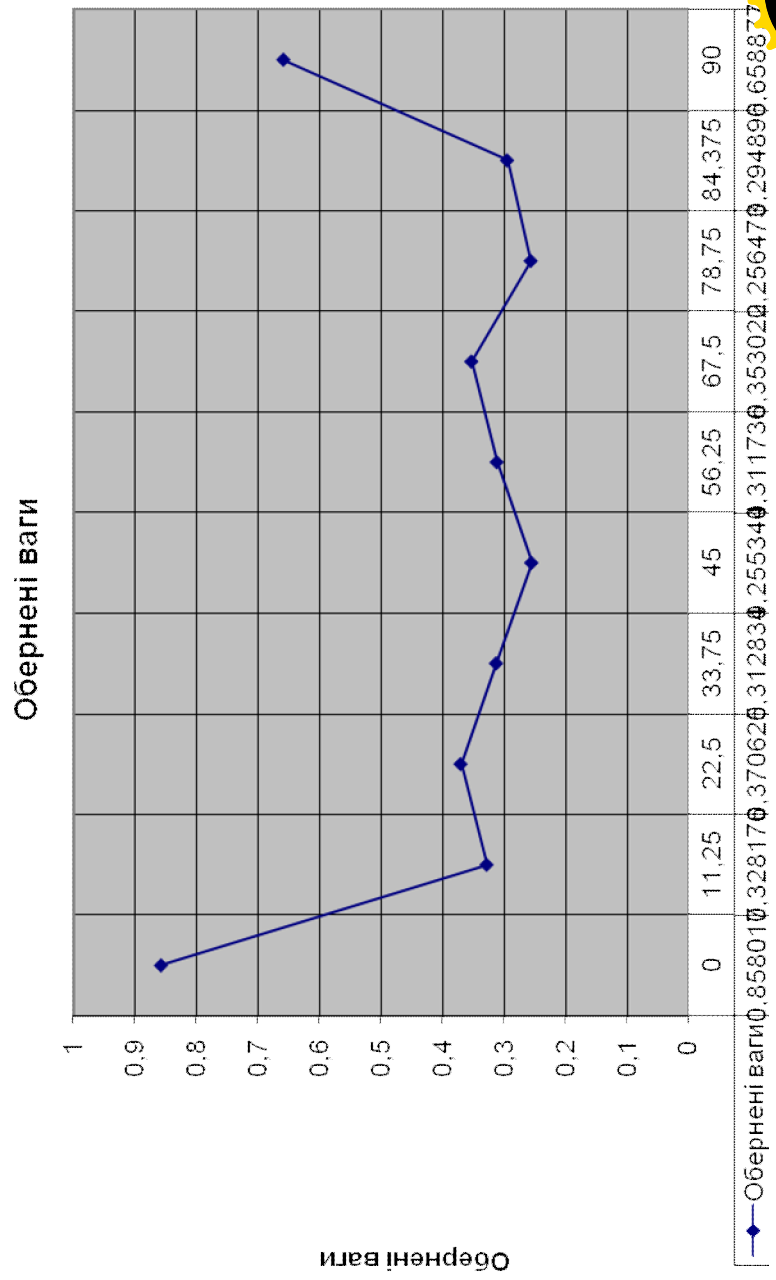
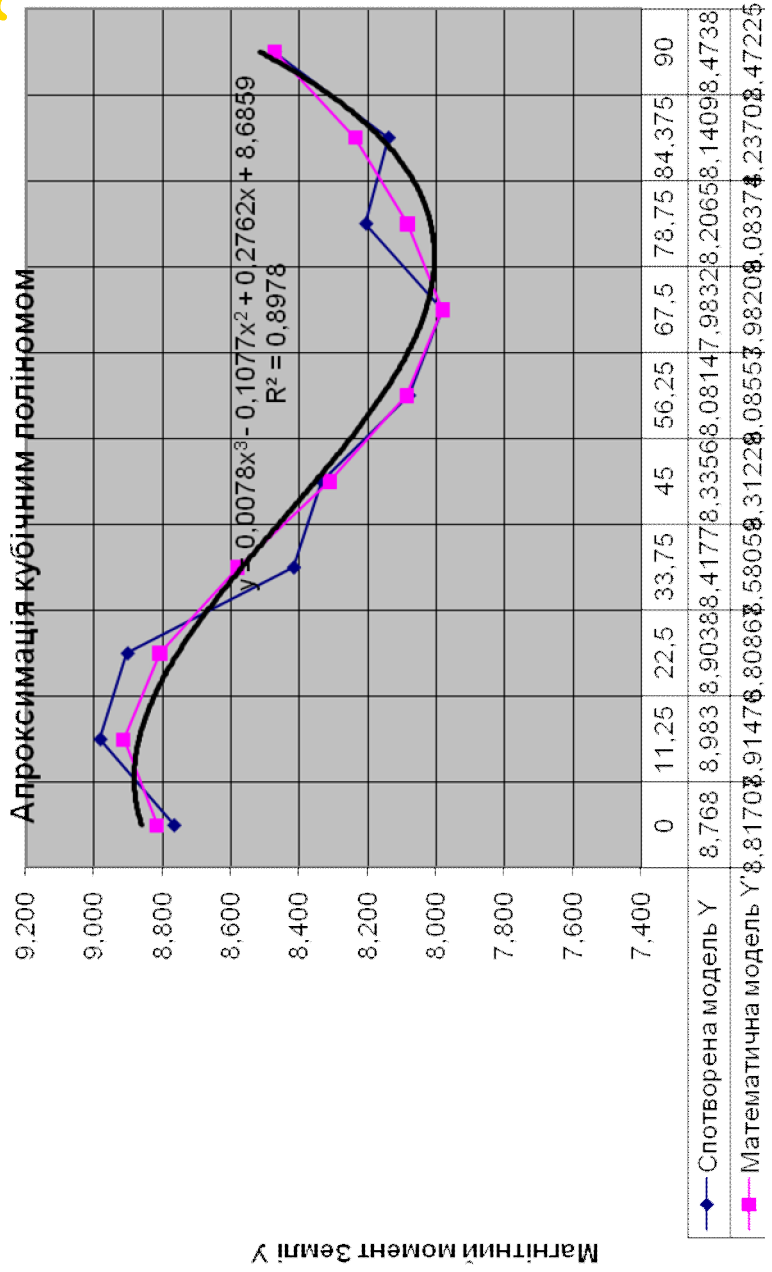
Середні квадратичні похибки зрівноваженої функції

$m\varphi =$

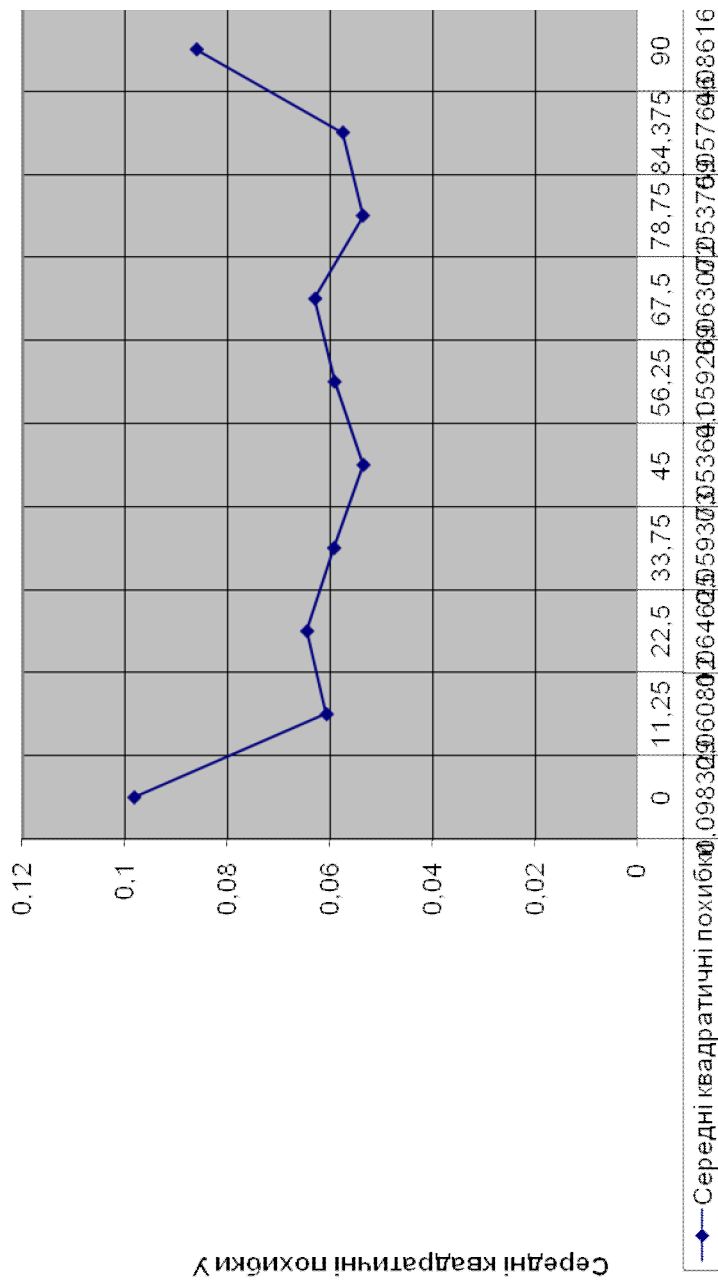
0,0983287
0,06081151
0,0646249
0,05937304
0,053641
0,05926879
0,06307151
0,05375924
0,05764571
0,08616572

Додаток 10. Діаграми досліджень

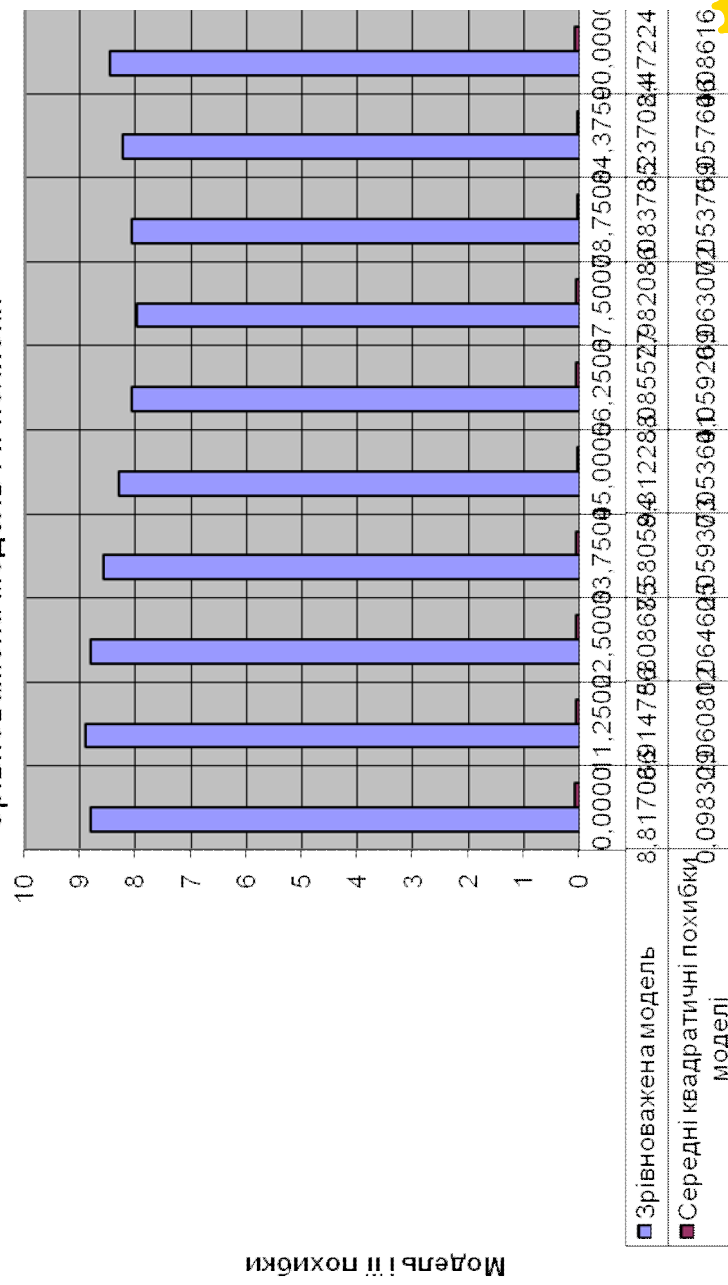


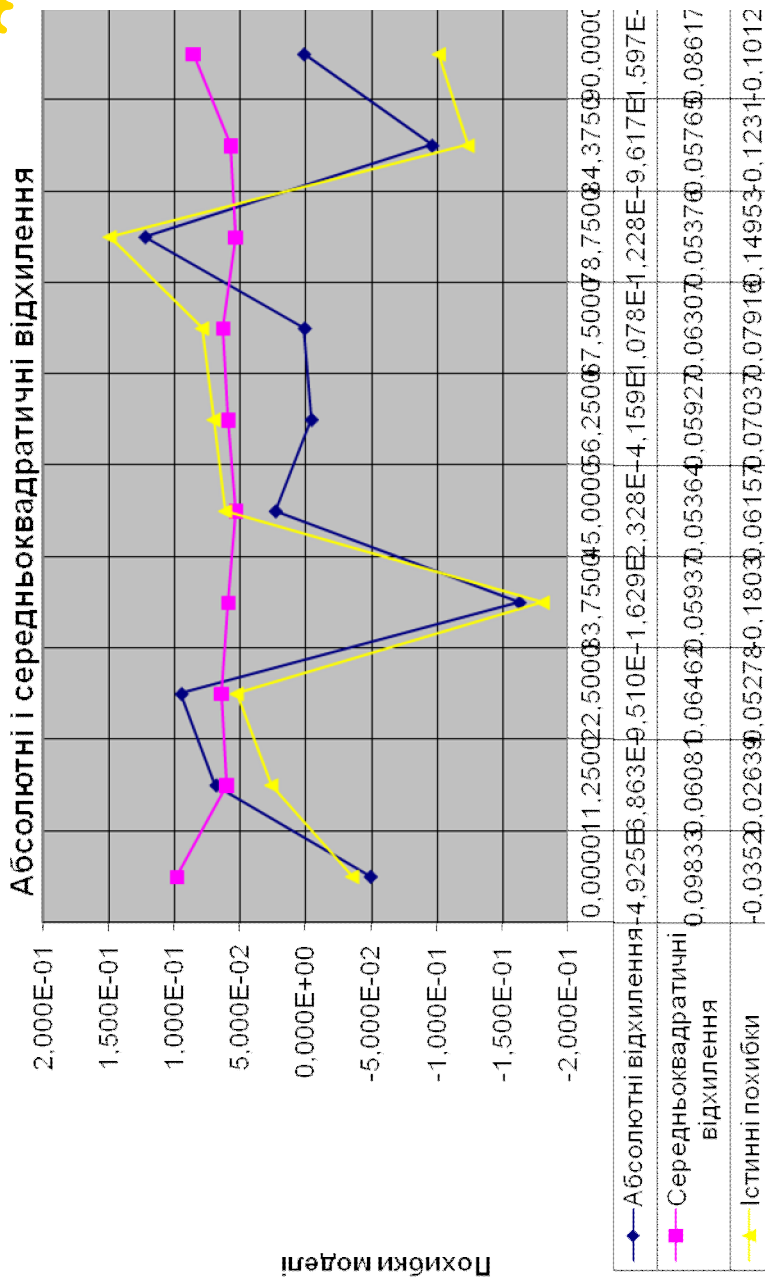


Середні квадратичні похибки

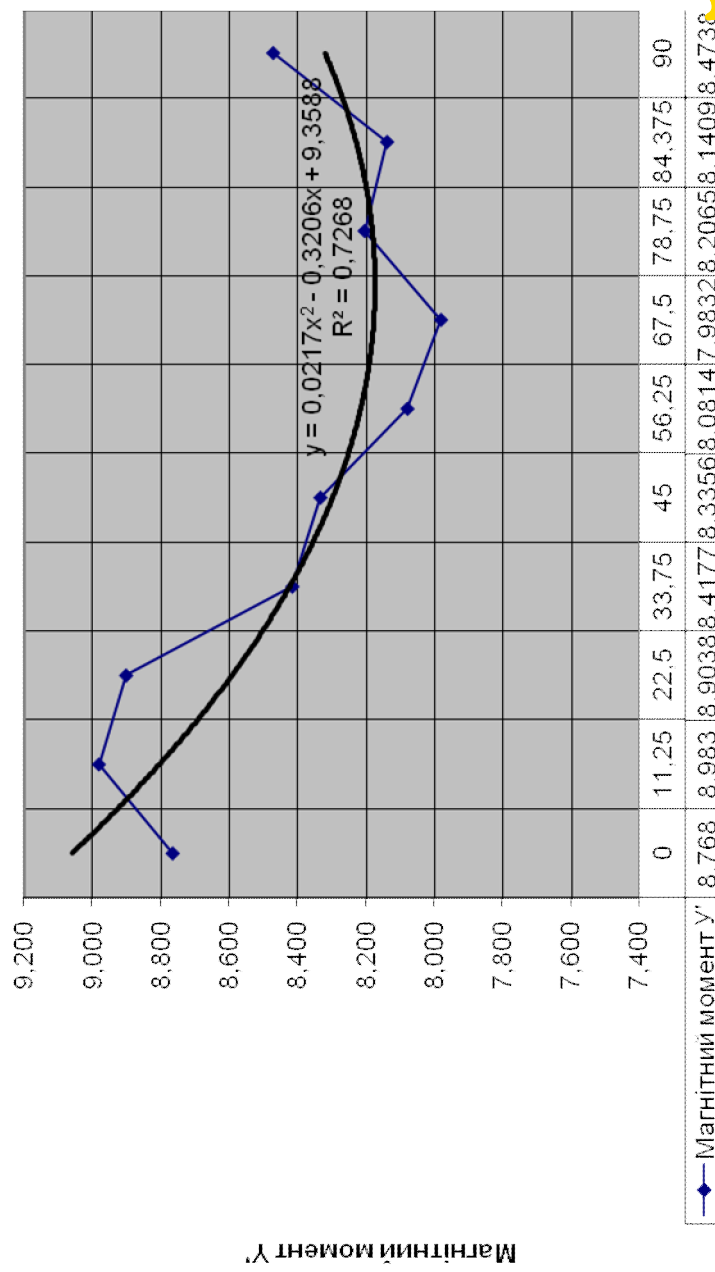


Зрівноважена модель і її похибки

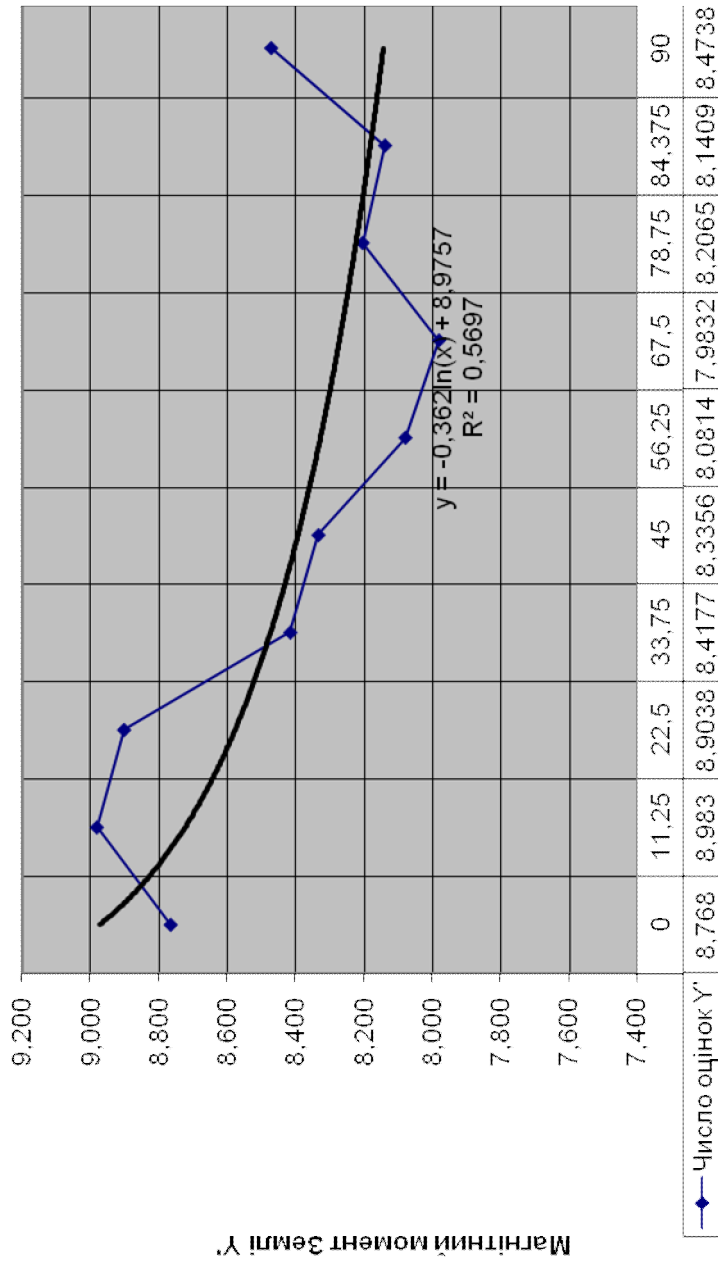




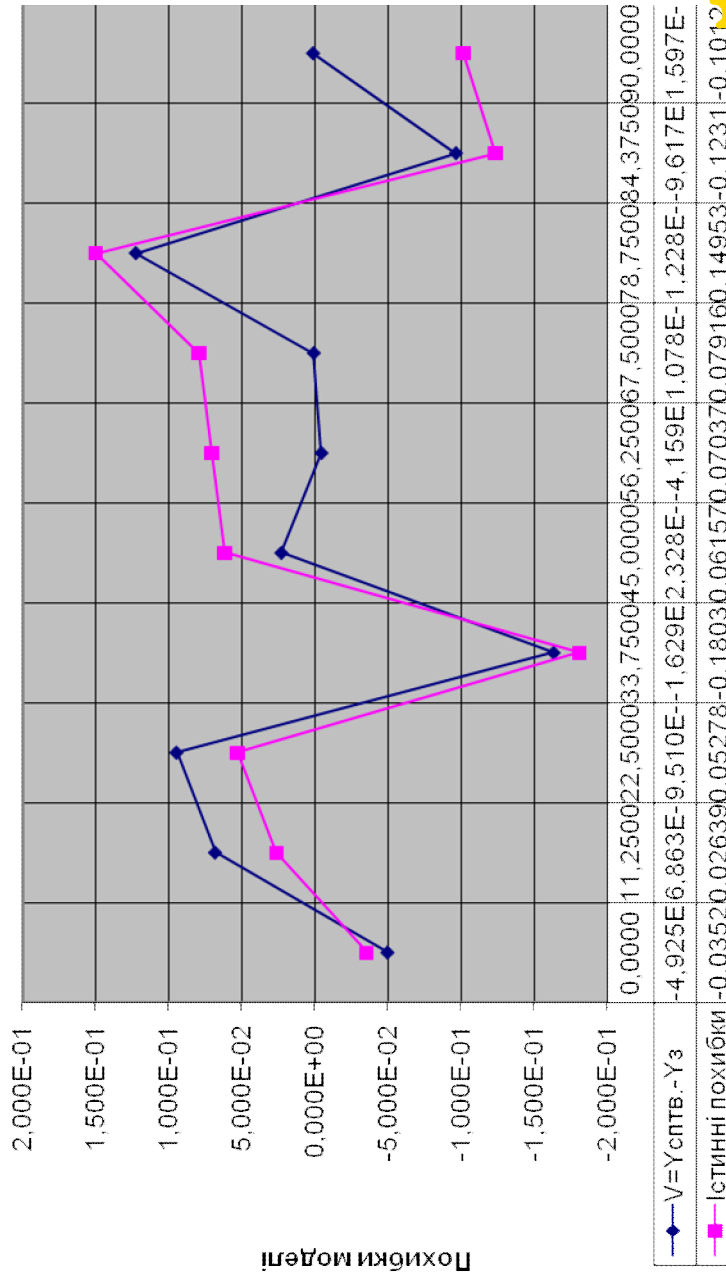
Апроксимація квадратичним поліномом

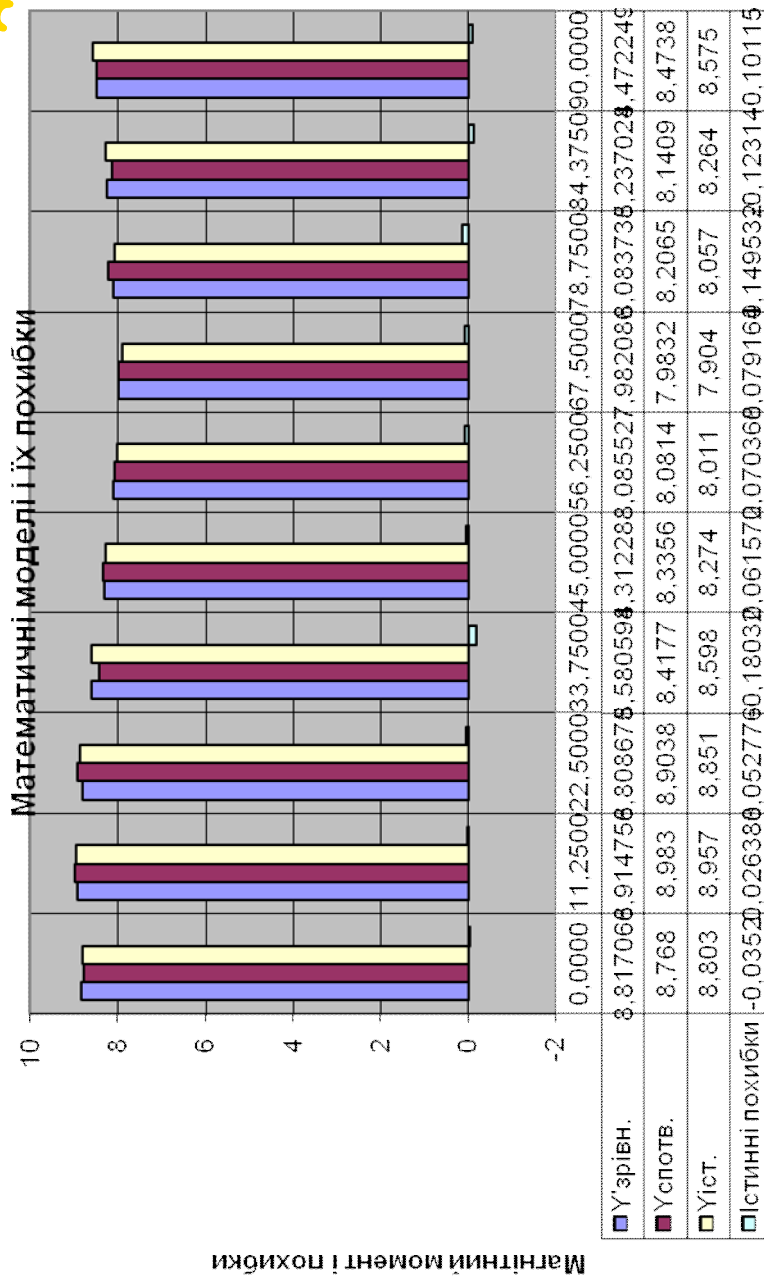


Апроксимация логарифмичною функцією



Істинні і абсолютні похибки





Додаток 11. Таблиці Валецького О.О.

Variant No./ Random values

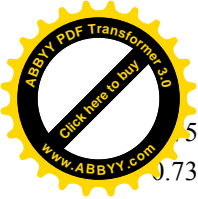
1	0.14	0.15	0.92	0.65	0.35	0.89	0.79	0.32	0.38	0.46	0.26	0.43	0.38	0.32	0.79	0.5
2	0.28	0.84	0.19	0.71	0.69	0.39	0.93	0.75	0.1	0.58	0.2	0.97	0.49	0.44	0.59	0.23
3	0.07	0.81	0.64	0.06	0.28	0.62	0.08	0.99	0.86	0.28	0.03	0.48	0.25	0.34	0.21	0.17
4	0.06	0.79	0.82	0.14	0.8	0.86	0.51	0.32	0.82	0.3	0.66	0.47	0.09	0.38	0.44	0.6
5	0.95	0.5	0.58	0.22	0.31	0.72	0.53	0.59	0.4	0.81	0.28	0.48	0.11	0.17	0.45	0.02
6	0.84	0.1	0.27	0.01	0.93	0.85	0.21	0.1	0.55	0.59	0.64	0.46	0.22	0.94	0.89	0.54
7	0.93	0.03	0.81	0.96	0.44	0.28	0.81	0.09	0.75	0.66	0.59	0.33	0.44	0.61	0.28	0.47
8	0.56	0.48	0.23	0.37	0.86	0.78	0.31	0.65	0.27	0.12	0.01	0.9	0.91	0.45	0.64	0.85
9	0.66	0.92	0.34	0.6	0.34	0.86	0.1	0.45	0.43	0.26	0.64	0.82	0.13	0.39	0.36	0.07
10	0.26	0.02	0.49	0.14	0.12	0.73	0.72	0.45	0.87	0	0.66	0.06	0.31	0.55	0.88	0.17

Variant No./ Random values

17	0.48	0.81	0.52	0.09	0.2	0.96	0.28	0.29	0.25	0.4	0.91	0.71	0.53	0.64	0.36	0.78
18	0.92	0.59	0.03	0.6	0.01	0.13	0.3	0.53	0.05	0.48	0.82	0.04	0.66	0.52	0.13	0.84
19	0.14	0.69	0.51	0.94	0.15	0.11	0.6	0.94	0.33	0.05	0.72	0.7	0.36	0.57	0.59	0.59
20	0.19	0.53	0.09	0.21	0.86	0.11	0.73	0.81	0.93	0.26	0.11	0.79	0.31	0.05	0.11	0.85
21	0.48	0.07	0.44	0.62	0.37	0.99	0.62	0.74	0.95	0.67	0.35	0.18	0.85	0.75	0.27	0.24
22	0.89	0.12	0.27	0.93	0.81	0.83	0.01	0.19	0.49	0.12	0.98	0.33	0.67	0.33	0.62	0.44
23	0.06	0.56	0.64	0.3	0.86	0.02	0.13	0.94	0.94	0.63	0.95	0.22	0.47	0.37	0.19	0.07
24	0.02	0.17	0.98	0.6	0.94	0.37	0.02	0.77	0.05	0.39	0.21	0.71	0.76	0.29	0.31	0.76
25	0.75	0.23	0.84	0.67	0.48	0.18	0.46	0.76	0.69	0.4	0.51	0.32	0	0.05	0.68	0.12
26	0.71	0.45	0.26	0.35	0.6	0.82	0.77	0.85	0.77	0.13	0.42	0.75	0.77	0.89	0.6	0.91

Variant No./ Random values

33	0.73	0.63	0.71	0.78	0.72	0.14	0.68	0.44	0.09	0.01	0.22	0.49	0.53	0.43	0.01	0.46
34	0.54	0.95	0.85	0.37	0.1	0.5	0.79	0.22	0.79	0.68	0.92	0.58	0.92	0.35	0.42	0.01
35	0.99	0.56	0.11	0.21	0.29	0.02	0.19	0.6	0.86	0.4	0.34	0.41	0.81	0.59	0.81	0.36
36	0.29	0.77	0.47	0.71	0.3	0.99	0.6	0.51	0.87	0.07	0.21	0.13	0.49	0.99	0.99	0.98
37	0.37	0.29	0.78	0.04	0.99	0.51	0.05	0.97	0.31	0.73	0.28	0.16	0.09	0.63	0.18	0.59
38	0.5	0.24	0.45	0.94	0.55	0.34	0.69	0.08	0.3	0.26	0.42	0.52	0.23	0.08	0.25	0.33
39	0.44	0.68	0.5	0.35	0.26	0.19	0.31	0.18	0.81	0.71	0.01	0	0.03	0.13	0.78	0.38



0.5 0.28 0.86 0.58 0.75 0.33 0.2 0.83 0.81 0.42 0.06 0.17 0.17 0.76 0.69 0.14
 0.73 0.03 0.59 0.82 0.53 0.49 0.04 0.28 0.75 0.54 0.68 0.73 0.11 0.59 0.56 0.28
 0.63 0.88 0.23 0.53 0.78 0.75 0.93 0.75 0.19 0.57 0.78 0.18 0.57 0.78 0.05 0.32

Variant No./ Random values

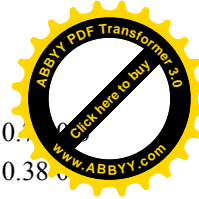
49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64
 0.17 0.12 0.26 0.8 0.66 0.13 0 0.19 0.27 0.87 0.66 0.11 0.19 0.59 0.09 0.21
 0.64 0.2 0.19 0.89 0.38 0.09 0.52 0.57 0.2 0.1 0.65 0.48 0.58 0.63 0.27 0.88
 0.65 0.93 0.61 0.53 0.38 0.18 0.27 0.96 0.82 0.3 0.3 0.19 0.52 0.03 0.53 0.01
 0.85 0.29 0.68 0.99 0.57 0.73 0.62 0.25 0.99 0.41 0.38 0.91 0.24 0.97 0.21 0.77
 0.52 0.83 0.47 0.91 0.31 0.51 0.55 0.74 0.85 0.72 0.42 0.45 0.41 0.5 0.69 0.59
 0.5 0.82 0.95 0.33 0.11 0.68 0.61 0.72 0.78 0.55 0.88 0.9 0.75 0.09 0.83 0.81
 0.75 0.46 0.37 0.46 0.49 0.39 0.31 0.92 0.55 0.06 0.04 0 0.92 0.77 0.01 0.67
 0.11 0.39 0 0.98 0.48 0.82 0.4 0.12 0.85 0.83 0.61 0.6 0.35 0.63 0.7 0.76
 0.6 0.1 0.47 0.1 0.18 0.19 0.42 0.95 0.55 0.96 0.19 0.89 0.46 0.76 0.78 0.37
 0.44 0.94 0.48 0.25 0.53 0.79 0.77 0.47 0.26 0.84 0.71 0.04 0.04 0.75 0.34 0.64

Variant No./ Random values

65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80
 0.62 0.08 0.04 0.66 0.84 0.25 0.9 0.69 0.49 0.12 0.93 0.31 0.36 0.77 0.02 0.89
 0.89 0.15 0.21 0.04 0.75 0.21 0.62 0.05 0.69 0.66 0.02 0.4 0.58 0.03 0.81 0.5
 0.19 0.35 0.11 0.25 0.33 0.82 0.43 0 0.35 0.58 0.76 0.4 0.24 0.74 0.96 0.47
 0.32 0.63 0.91 0.41 0.99 0.27 0.26 0.04 0.26 0.99 0.22 0.79 0.67 0.82 0.35 0.47
 0.81 0.63 0.6 0.09 0.34 0.17 0.21 0.64 0.12 0.19 0.92 0.45 0.86 0.31 0.5 0.3
 0.28 0.61 0.82 0.97 0.45 0.55 0.7 0.67 0.49 0.83 0.85 0.05 0.49 0.45 0.88 0.58
 0.69 0.26 0.99 0.56 0.9 0.92 0.72 0.1 0.79 0.75 0.09 0.3 0.29 0.55 0.32 0.11
 0.65 0.34 0.49 0.87 0.2 0.27 0.55 0.96 0.02 0.36 0.48 0.06 0.65 0.49 0.91 0.19
 0.88 0.18 0.34 0.79 0.77 0.53 0.56 0.63 0.69 0.8 0.74 0.26 0.54 0.25 0.27 0.86
 0.25 0.51 0.81 0.84 0.17 0.57 0.46 0.72 0.89 0.09 0.77 0.77 0.27 0.93 0.8 0

Variant No./ Random values

81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96
 0.81 0.64 0.7 0.6 0.01 0.61 0.45 0.24 0.91 0.92 0.17 0.32 0.17 0.21 0.47 0.72
 0.35 0.01 0.41 0.44 0.19 0.73 0.56 0.85 0.48 0.16 0.13 0.61 0.15 0.73 0.52 0.55
 0.21 0.33 0.47 0.57 0.41 0.84 0.94 0.68 0.43 0.85 0.23 0.32 0.39 0.07 0.39 0.41
 0.43 0.33 0.45 0.47 0.76 0.24 0.16 0.86 0.25 0.18 0.98 0.35 0.69 0.48 0.55 0.62
 0.09 0.92 0.19 0.22 0.21 0.84 0.27 0.25 0.5 0.25 0.42 0.56 0.88 0.76 0.71 0.79



0.04 0.94 0.6 0.16 0.53 0.46 0.68 0.04 0.98 0.86 0.27 0.23 0.27 0.91 0
 0.85 0.78 0.43 0.83 0.82 0.79 0.67 0.97 0.66 0.81 0.45 0.41 0 0.95 0.38
 0.78 0.63 0.6 0.95 0.06 0.8 0.06 0.42 0.25 0.12 0.52 0.05 0.11 0.73 0.92 0.98

0.48 0.96 0.08 0.41 0.28 0.48 0.86 0.26 0.94 0.56 0.04 0.24 0.19 0.65 0.28 0.5

0.22 0.21 0.06 0.61 0.18 0.63 0.06 0.74 0.42 0.78 0.62 0.2 0.39 0.19 0.49 0.45

Variant No./ Random values

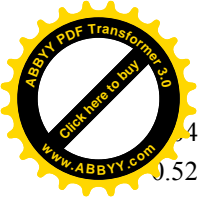
97 98 99 100 101 102 103 104 105 106 107 108 109 110 111 112
 0.04 0.71 0.23 0.71 0.37 0.86 0.96 0.09 0.56 0.36 0.43 0.71 0.91 0.72 0.87 0.46
 0.77 0.64 0.65 0.75 0.73 0.96 0.24 0.13 0.89 0.08 0.65 0.83 0.26 0.45 0.99 0.58
 0.13 0.39 0.04 0.78 0.02 0.75 0.9 0.09 0.94 0.65 0.76 0.4 0.78 0.95 0.12 0.69
 0.46 0.83 0.98 0.35 0.25 0.95 0.7 0.98 0.25 0.82 0.26 0.2 0.52 0.24 0.89 0.4
 0.77 0.26 0.71 0.94 0.78 0.26 0.84 0.82 0.6 0.14 0.76 0.99 0.09 0.02 0.64 0.01
 0.36 0.39 0.44 0.37 0.45 0.53 0.05 0.06 0.82 0.03 0.49 0.62 0.52 0.45 0.17 0.49
 0.39 0.96 0.51 0.43 0.14 0.29 0.8 0.91 0.9 0.65 0.92 0.5 0.93 0.72 0.21 0.69
 0.64 0.61 0.51 0.57 0.09 0.85 0.83 0.87 0.41 0.05 0.97 0.88 0.59 0.59 0.77 0.29
 0.75 0.49 0.89 0.3 0.16 0.17 0.53 0.92 0.84 0.68 0.13 0.82 0.68 0.68 0.38 0.68
 0.94 0.27 0.74 0.15 0.59 0.91 0.85 0.59 0.25 0.24 0.59 0.53 0.95 0.94 0.31 0.04

Variant No./ Random values

113 114 115 116 117 118 119 120 121 122 123 124 125 126 127 128
 0.99 0.72 0.52 0.46 0.8 0.84 0.59 0.87 0.27 0.36 0.44 0.69 0.58 0.48 0.65 0.38
 0.36 0.73 0.62 0.22 0.62 0.6 0.99 0.12 0.46 0.08 0.05 0.12 0.43 0.88 0.43 0.9
 0.45 0.12 0.44 0.13 0.65 0.49 0.76 0.27 0.8 0.79 0.77 0.15 0.69 0.14 0.35 0.99
 0.77 0 0.12 0.96 0.16 0.08 0.94 0.41 0.69 0.48 0.68 0.55 0.58 0.48 0.4 0.63
 0.53 0.42 0.2 0.72 0.22 0.58 0.28 0.48 0.86 0.48 0.15 0.84 0.56 0.02 0.85 0.06
 0.01 0.68 0.42 0.73 0.94 0.52 0.26 0.74 0.67 0.67 0.88 0.95 0.25 0.21 0.38 0.52
 0.25 0.49 0.95 0.46 0.66 0.72 0.78 0.23 0.98 0.64 0.56 0.59 0.61 0.16 0.35 0.48
 0.86 0.23 0.05 0.77 0.45 0.64 0.98 0.03 0.55 0.93 0.63 0.45 0.68 0.17 0.43 0.24
 0.11 0.25 0.15 0.07 0.6 0.69 0.47 0.94 0.51 0.09 0.65 0.96 0.09 0.4 0.25 0.22
 0.88 0.79 0.71 0.08 0.93 0.14 0.56 0.69 0.13 0.68 0.67 0.22 0.87 0.48 0.94 0.05

Variant No./ Random values

129 130 131 132 133 134 135 136 137 138 139 140 141 142 143 144
 0.6 0.1 0.15 0.03 0.3 0.86 0.17 0.92 0.86 0.8 0.92 0.08 0.74 0.76 0.09 0.17
 0.82 0.49 0.38 0.58 0.9 0.09 0.71 0.49 0.09 0.67 0.59 0.85 0.26 0.13 0.65 0.54
 0.97 0.81 0.89 0.31 0.29 0.78 0.48 0.21 0.68 0.29 0.98 0.94 0.87 0.22 0.65 0.88



4 0.85 0.75 0.64 0.01 0.42 0.7 0.47 0.75 0.55 0.13 0.23 0.79 0.64 0.14 0.51
 0.52 0.37 0.46 0.23 0.43 0.64 0.54 0.28 0.58 0.44 0.47 0.95 0.26 0.58 0.67 0.82
 0.1 0.51 0.14 0.13 0.54 0.73 0.57 0.39 0.52 0.31 0.13 0.42 0.71 0.66 0.1 0.21
 0.35 0.96 0.95 0.36 0.23 0.14 0.42 0.95 0.24 0.84 0.93 0.71 0.87 0.11 0.01 0.45
 0.76 0.54 0.03 0.59 0.02 0.79 0.93 0.44 0.03 0.74 0.2 0.07 0.31 0.05 0.78 0.53
 0.9 0.62 0.19 0.83 0.87 0.44 0.78 0.08 0.47 0.84 0.89 0.68 0.33 0.21 0.44 0.57
 0.13 0.86 0.87 0.51 0.94 0.35 0.06 0.43 0.02 0.18 0.45 0.31 0.91 0.04 0.84 0.81

Variant No./ Random values

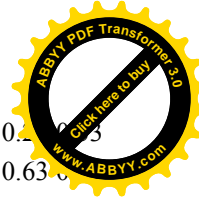
145 146 147 148 149 150 151 152 153 154 155 156 157 158 159 160
 0 0.53 0.7 0.61 0.46 0.8 0.67 0.49 0.19 0.27 0.81 0.91 0.19 0.79 0.39 0.95
 0.2 0.61 0.41 0.96 0.63 0.42 0.87 0.54 0.44 0.06 0.43 0.74 0.51 0.23 0.71 0.81
 0.92 0.17 0.99 0.98 0.39 0.1 0.15 0.91 0.95 0.61 0.81 0.46 0.75 0.14 0.26 0.91
 0.23 0.97 0.48 0.94 0.09 0.07 0.18 0.64 0.94 0.23 0.19 0.61 0.56 0.79 0.45 0.2
 0.8 0.95 0.14 0.65 0.5 0.22 0.52 0.31 0.6 0.38 0.81 0.93 0.01 0.42 0.09 0.37
 0.62 0.13 0.78 0.55 0.95 0.66 0.38 0.93 0.77 0.87 0.08 0.3 0.39 0.06 0.97 0.92
 0.07 0.73 0.46 0.72 0.21 0.82 0.56 0.25 0.99 0.66 0.15 0.01 0.42 0.15 0.03 0.06
 0.8 0.38 0.44 0.77 0.34 0.54 0.92 0.02 0.6 0.54 0.14 0.66 0.59 0.25 0.2 0.14
 0.97 0.44 0.28 0.5 0.73 0.25 0.18 0.66 0.6 0.02 0.13 0.24 0.34 0.08 0.81 0.9
 0.71 0.04 0.86 0.33 0.17 0.34 0.64 0.96 0.51 0.45 0.39 0.05 0.79 0.62 0.68 0.56

Variant No./ Random values

161 162 163 164 165 166 167 168 169 170 171 172 173 174 175 176
 0.1 0.05 0.5 0.81 0.06 0.65 0.87 0.96 0.99 0.81 0.63 0.57 0.47 0.36 0.38 0.4
 0.52 0.57 0.14 0.59 0.1 0.28 0.97 0.06 0.41 0.4 0.11 0.09 0.71 0.2 0.62 0.8
 0.43 0.9 0.39 0.75 0.95 0.15 0.67 0.71 0.57 0.7 0.04 0.2 0.33 0.78 0.69 0.93
 0.6 0.07 0.23 0.05 0.58 0.76 0.31 0.76 0.35 0.94 0.21 0.87 0.31 0.25 0.14 0.71
 0.2 0.53 0.29 0.28 0.19 0.18 0.26 0.18 0.61 0.25 0.86 0.73 0.21 0.57 0.91 0.98
 0.41 0.48 0.48 0.82 0.91 0.64 0.47 0.06 0.09 0.57 0.52 0.7 0.69 0.57 0.22 0.09
 0.17 0.56 0.71 0.16 0.72 0.29 0.1 0.98 0.16 0.9 0.91 0.52 0.8 0.17 0.35 0.06
 0.71 0.27 0.48 0.58 0.32 0.22 0.87 0.18 0.35 0.2 0.93 0.53 0.96 0.57 0.25 0.12
 0.1 0.83 0.57 0.91 0.51 0.36 0.98 0.82 0.09 0.14 0.44 0.21 0 0.67 0.51 0.03
 0.34 0.67 0.11 0.03 0.14 0.12 0.67 0.11 0.13 0.69 0.9 0.86 0.58 0.51 0.63 0.98

Variant No./ Random values

177 178 179 180 181 182 183 184 185 186 187 188 189 190 191 192
 0.31 0.5 0.19 0.7 0.16 0.51 0.51 0.16 0.85 0.17 0.14 0.37 0.65 0.76 0.18 0.35



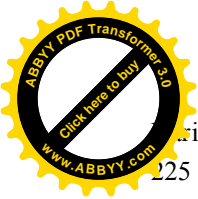
0.15 0.56 0.5 0.88 0.49 0.09 0.98 0.98 0.59 0.98 0.23 0.87 0.34 0.55 0.2
 0.16 0.35 0.5 0.76 0.47 0.91 0.85 0.35 0.89 0.32 0.26 0.18 0.54 0.89 0.63
 0.32 0.93 0.3 0.89 0.85 0.7 0.64 0.2 0.46 0.75 0.25 0.9 0.7 0.91 0.54 0.81
 0.41 0.65 0.49 0.85 0.94 0.61 0.63 0.71 0.8 0.27 0.09 0.81 0.99 0.43 0.09 0.92
 0.44 0.88 0.95 0.75 0.71 0.28 0.28 0.9 0.59 0.23 0.23 0.32 0.6 0.97 0.29 0.97
 0.12 0.08 0.44 0.33 0.57 0.32 0.65 0.48 0.93 0.82 0.39 0.11 0.93 0.25 0.97 0.46
 0.36 0.67 0.3 0.58 0.36 0.04 0.14 0.28 0.13 0.88 0.3 0.32 0.03 0.82 0.49 0.03
 0.75 0.89 0.85 0.24 0.37 0.44 0.17 0.02 0.91 0.32 0.76 0.56 0.18 0.09 0.37 0.73
 0.44 0.4 0.3 0.7 0.74 0.69 0.21 0.12 0.01 0.91 0.3 0.2 0.33 0.03 0.8 0.19

Variant No./ Random values

193 194 195 196 197 198 199 200 201 202 203 204 205 206 207 208
 0.76 0.21 0.1 0.11 0 0.44 0.92 0.93 0.21 0.51 0.6 0.84 0.24 0.44 0.85 0.96
 0.37 0.66 0.98 0.38 0.95 0.22 0.86 0.84 0.78 0.31 0.23 0.55 0.26 0.58 0.21 0.31
 0.44 0.95 0.76 0.85 0.72 0.62 0.43 0.34 0.41 0.89 0.3 0.39 0.68 0.64 0.26 0.24
 0.34 0.1 0.77 0.32 0.26 0.97 0.8 0.28 0.07 0.31 0.89 0.15 0.44 0.11 0.01 0.04
 0.46 0.82 0.32 0.52 0.71 0.62 0.01 0.05 0.26 0.52 0.27 0.21 0.11 0.66 0.03 0.96
 0.66 0.55 0.73 0.09 0.25 0.47 0.11 0.05 0.57 0.85 0.37 0.63 0.46 0.68 0.2 0.65
 0.31 0.09 0.89 0.65 0.26 0.91 0.86 0.2 0.56 0.47 0.69 0.31 0.25 0.7 0.58 0.63
 0.56 0.62 0.01 0.85 0.58 0.1 0.07 0.29 0.36 0.06 0.59 0.87 0.64 0.86 0.11 0.79
 0.1 0.45 0.33 0.48 0.85 0.03 0.46 0.11 0.36 0.57 0.68 0.67 0.53 0.24 0.94 0.41
 0.66 0.8 0.39 0.62 0.65 0.79 0.78 0.77 0.18 0.55 0.6 0.84 0.55 0.29 0.65 0.41

Variant No./ Random values

209 210 211 212 213 214 215 216 217 218 219 220 221 222 223 224
 0.26 0.65 0.4 0.85 0.3 0.61 0.43 0.44 0.43 0.18 0.58 0.67 0.69 0.75 0.14 0.56
 0.61 0.4 0.68 0 0.7 0.02 0.37 0.87 0.76 0.59 0.13 0.44 0.01 0.71 0.27 0.49
 0.47 0.04 0.2 0.56 0.22 0.3 0.53 0.89 0.94 0.56 0.13 0.14 0.07 0.11 0.27 0
 0.04 0.07 0.85 0.47 0.33 0.26 0.99 0.39 0.08 0.14 0.54 0.66 0.46 0.45 0.88 0.07
 0.97 0.27 0.08 0.26 0.68 0.3 0.63 0.43 0.28 0.58 0.78 0.56 0.98 0.3 0.52 0.35
 0.8 0.89 0.33 0.06 0.57 0.57 0.4 0.67 0.95 0.45 0.71 0.63 0.77 0.52 0.54 0.2
 0.21 0.14 0.95 0.57 0.61 0.58 0.14 0 0.25 0.01 0.26 0.22 0.85 0.94 0.13 0.02
 0.16 0.47 0.15 0.5 0.97 0.92 0.59 0.23 0.09 0.9 0.79 0.65 0.47 0.37 0.61 0.25
 0.51 0.76 0.56 0.75 0.13 0.57 0.51 0.78 0.29 0.66 0.64 0.54 0.77 0.91 0.74 0.5
 0.11 0.29 0.96 0.14 0.89 0.03 0.04 0.63 0.99 0.47 0.13 0.29 0.62 0.1 0.73 0.4



Variant No./ Random values

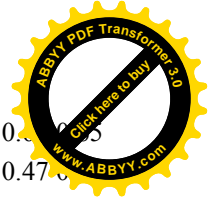
225 226 227 228 229 230 231 232 233 234 235 236 237 238 239 240
0.43 0.75 0.18 0.95 0.73 0.59 0.61 0.45 0.89 0.01 0.93 0.89 0.71 0.31 0.11 0.79
0.04 0.29 0.78 0.28 0.56 0.47 0.5 0.32 0.03 0.19 0.86 0.91 0.51 0.4 0.28 0.7
0.8 0.85 0.99 0.04 0.8 0.1 0.94 0.12 0.14 0.72 0.21 0.31 0.79 0.47 0.64 0.77
0.72 0.62 0.24 0.14 0.25 0.48 0.54 0.54 0.03 0.32 0.15 0.71 0.85 0.3 0.61 0.42
0.28 0.81 0.37 0.58 0.5 0.43 0.06 0.33 0.21 0.75 0.18 0.29 0.79 0.86 0.62 0.23
0.71 0.72 0.15 0.91 0.6 0.77 0.16 0.69 0.25 0.47 0.48 0.73 0.89 0.86 0.65 0.49
0.49 0.45 0.01 0.14 0.65 0.4 0.62 0.84 0.33 0.66 0.39 0.37 0.9 0.03 0.97 0.69
0.26 0.56 0.72 0.14 0.63 0.85 0.3 0.67 0.36 0.09 0.65 0.71 0.2 0.91 0.8 0.76
0.38 0.32 0.71 0.66 0.41 0.62 0.74 0.88 0.88 0 0.78 0.69 0.25 0.6 0.29 0.02
0.28 0.47 0.21 0.04 0.03 0.17 0.21 0.18 0.6 0.82 0.04 0.19 0 0.04 0.22 0.96

Variant No./ Random values

241 242 243 244 245 246 247 248 249 250 251 252 253 254 255 256
0.61 0.71 0.19 0.63 0.77 0.92 0.13 0.37 0.57 0.51 0.14 0.95 0.95 0.01 0.56 0.6
0.49 0.63 0.18 0.62 0.94 0.72 0.65 0.47 0.36 0.42 0.52 0.3 0.81 0.77 0.03 0.67
0.51 0.59 0.06 0.73 0.5 0.23 0.5 0.72 0.83 0.54 0.05 0.67 0.04 0.03 0.86 0.74
0.35 0.13 0.62 0.22 0.24 0.77 0.15 0.89 0.15 0.04 0.95 0.3 0.98 0.44 0.48 0.93
0.33 0.09 0.63 0.4 0.87 0.8 0.76 0.93 0.25 0.99 0.39 0.78 0.05 0.41 0.93 0.41
0.44 0.73 0.77 0.44 0.18 0.42 0.63 0.12 0.98 0.6 0.8 0.99 0.88 0.86 0.87 0.41
0.32 0.6 0.47 0.21 0.56 0.95 0.16 0.23 0.96 0.58 0.64 0.57 0.3 0.21 0.63 0.15
0.98 0.19 0.31 0.95 0.16 0.73 0.53 0.81 0.29 0.74 0.16 0.77 0.29 0.47 0.86 0.72
0.42 0.29 0.24 0.65 0.43 0.66 0.8 0.09 0.8 0.67 0.69 0.28 0.23 0.82 0.8 0.68
0.99 0.64 0 0.48 0.24 0.35 0.4 0.37 0.01 0.41 0.63 0.14 0.96 0.58 0.97 0.94

Variant No./ Random values

257 258 259 260 261 262 263 264 265 266 267 268 269 270 271 272
0.09 0.24 0.32 0.37 0.89 0.69 0.07 0.06 0.97 0.79 0.42 0.23 0.62 0.5 0.82 0.21
0.68 0.89 0.57 0.38 0.37 0.98 0.62 0.3 0.01 0.59 0.37 0.76 0.47 0.16 0.51 0.22
0.89 0.35 0.78 0.6 0.15 0.88 0.16 0.17 0.55 0.78 0.29 0.73 0.52 0.33 0.44 0.6
0.42 0.81 0.51 0.26 0.27 0.2 0.37 0.34 0.31 0.46 0.53 0.19 0.77 0.77 0.41 0.6
0.31 0.99 0.06 0.65 0.54 0.18 0.76 0.39 0.79 0.29 0.33 0.44 0.19 0.52 0.15 0.41
0.34 0.18 0.99 0.48 0.54 0.44 0.73 0.45 0.67 0.38 0.31 0.62 0.49 0.93 0.41 0.91
0.31 0.81 0.48 0.09 0.27 0.77 0.71 0.03 0.86 0.38 0.77 0.34 0.31 0.77 0.2 0.75
0.45 0.65 0.45 0.32 0.2 0.77 0.7 0.92 0.12 0.01 0.9 0.51 0.66 0.09 0.62 0.8



0.49 0.09 0.26 0.36 0.01 0.97 0.59 0.88 0.28 0.16 0.13 0.32 0.31 0.66 0.0
0.28 0.61 0.93 0.26 0.68 0.63 0.36 0.06 0.27 0.35 0.67 0.63 0.03 0.54 0.47

Variant No./ Random values

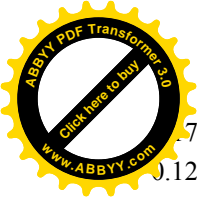
273 274 275 276 277 278 279 280 281 282 283 284 285 286 287 288
0.28 0.03 0.5 0.45 0.07 0.77 0.23 0.55 0.47 0.1 0.58 0.59 0.54 0.87 0.02 0.79
0.08 0.14 0.35 0.62 0.4 0.14 0.51 0.71 0.8 0.62 0.46 0.43 0.62 0.67 0.94 0.56
0.12 0.75 0.31 0.81 0.34 0.07 0.83 0.3 0.33 0.62 0.54 0.23 0.27 0.83 0.94 0.49
0.75 0.38 0.24 0.37 0.2 0.58 0.35 0.31 0.14 0.77 0.11 0.99 0.26 0.06 0.38 0.13
0.34 0.67 0.76 0.87 0.96 0.95 0.97 0.03 0.09 0.83 0.39 0.13 0.07 0.71 0.09 0.87
0.04 0.08 0.59 0.13 0.37 0.46 0.41 0.44 0.28 0.22 0.77 0.26 0.34 0.65 0.94 0.7
0.47 0.45 0.87 0.84 0.77 0.87 0.2 0.19 0.27 0.71 0.52 0.8 0.73 0.17 0.67 0.9
0.77 0.07 0.15 0.72 0.13 0.44 0.47 0.3 0.6 0.57 0 0.73 0.34 0.92 0.43 0.69
0.31 0.13 0.83 0.5 0.49 0.31 0.63 0.12 0.84 0.04 0.25 0.12 0.19 0.25 0.65 0.17
0.98 0.06 0.94 0.11 0.35 0.28 0.01 0.31 0.47 0.01 0.3 0.47 0.81 0.64 0.37 0.88

Variant No./ Random values

289 290 291 292 293 294 295 296 297 298 299 300 301 302 303 304
0.51 0.85 0.29 0.09 0.28 0.54 0.52 0.01 0.16 0.58 0.39 0.34 0.19 0.65 0.62 0.13
0.49 0.14 0.34 0.15 0.95 0.62 0.58 0.65 0.86 0.55 0.7 0.55 0.26 0.9 0.49 0.65
0.2 0.98 0.58 0.03 0.38 0.5 0.72 0.24 0.26 0.48 0.29 0.39 0.72 0.85 0.84 0.78
0.31 0.63 0.05 0.77 0.77 0.56 0.06 0.88 0.87 0.64 0.46 0.24 0.82 0.46 0.85 0.79
0.26 0.03 0.95 0.35 0.27 0.73 0.48 0.03 0.04 0.8 0.29 0 0.58 0.76 0.07 0.58
0.25 0.1 0.47 0.47 0.09 0.16 0.43 0.96 0.13 0.62 0.67 0.6 0.44 0.92 0.56 0.27
0.42 0.04 0.2 0.83 0.2 0.85 0.66 0.11 0.9 0.62 0.54 0.54 0.33 0.72 0.13 0.15
0.35 0.95 0.84 0.5 0.68 0.77 0.24 0.6 0.29 0.01 0.61 0.87 0.66 0.79 0.52 0.4
0.61 0.63 0.42 0.52 0.25 0.77 0.19 0.54 0.29 0.16 0.29 0.91 0.93 0.06 0.45 0.53
0.77 0.99 0.14 0.03 0.73 0.4 0.43 0.28 0.75 0.26 0.28 0.88 0.96 0.39 0.95 0.87

Variant No./ Random values

305 306 307 308 309 310 311 312 313 314 315 316 317 318 319 320
0.94 0.75 0.72 0.91 0.74 0.64 0.26 0.35 0.74 0.55 0.25 0.4 0.79 0.09 0.14 0.51
0.35 0.71 0.11 0.36 0.94 0.1 0.91 0.19 0.39 0.32 0.51 0.91 0.07 0.6 0.2 0.82
0.52 0.02 0.61 0.87 0.98 0.53 0.18 0.87 0.7 0.58 0.42 0.97 0.25 0.91 0.67 0.78
0.13 0.14 0.96 0.99 0 0.9 0.19 0.21 0.16 0.97 0.17 0.37 0.27 0.84 0.76 0.84
0.72 0.68 0.6 0.84 0.9 0.03 0.37 0.7 0.24 0.24 0.29 0.16 0.51 0.3 0.05 0
0.51 0.68 0.32 0.33 0.64 0.35 0.03 0.89 0.51 0.7 0.29 0.89 0.39 0.22 0.33 0.45



7 0.22 0.01 0.38 0.12 0.8 0.69 0.65 0.01 0.17 0.84 0.4 0.87 0.45 0.19 0.6
 0.12 0.12 0.28 0.59 0.93 0.71 0.62 0.31 0.3 0.17 0.11 0.44 0.48 0.46 0.4 0.9
 0.38 0.9 0.64 0.49 0.54 0.44 0 0.61 0.98 0.69 0.07 0.54 0.85 0.16 0.02 0.63
 0.27 0.5 0.52 0.98 0.34 0.91 0.87 0.4 0.78 0.66 0.8 0.88 0.18 0.33 0.85 0.1

Variant No./ Random values

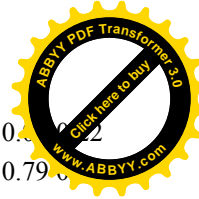
321 322 323 324 325 326 327 328 329 330 331 332 333 334 335 336
 0.22 0.83 0.34 0.5 0.85 0.04 0.86 0.08 0.25 0.03 0.93 0.02 0.13 0.32 0.19 0.71
 0.55 0.18 0.43 0.06 0.35 0.45 0.5 0.07 0.66 0.82 0.82 0.94 0.93 0.04 0.13 0.77
 0.65 0.52 0.79 0.39 0.75 0.17 0.54 0.61 0.39 0.53 0.98 0.46 0.83 0.39 0.36 0.38
 0.3 0.47 0.46 0.11 0.99 0.66 0.53 0.85 0.81 0.53 0.84 0.2 0.56 0.85 0.33 0.86
 0.21 0.86 0.72 0.52 0.33 0.4 0.28 0.3 0.87 0.11 0.23 0.28 0.27 0.89 0.21 0.25
 0.07 0.71 0.26 0.29 0.46 0.32 0.29 0.56 0.39 0.89 0.89 0.89 0.35 0.82 0.11 0.67
 0.45 0.62 0.7 0.1 0.21 0.83 0.56 0.46 0.22 0.01 0.34 0.96 0.71 0.51 0.88 0.19
 0.09 0.73 0.03 0.81 0.19 0.8 0.04 0.97 0.34 0.07 0.23 0.96 0.1 0.36 0.85 0.4
 0.66 0.43 0.19 0.39 0.5 0.97 0.9 0.19 0.06 0.99 0.63 0.95 0.52 0.45 0.3 0.05
 0.45 0.05 0.8 0.68 0.55 0.01 0.95 0.67 0.3 0.22 0.92 0.19 0.13 0.93 0.39 0.18

Variant No./ Random values

337 338 339 340 341 342 343 344 345 346 347 348 349 350 351 352
 0.56 0.8 0.34 0.49 0.03 0.98 0.2 0.59 0.55 0.1 0.02 0.26 0.35 0.35 0.36 0.19
 0.2 0.41 0.99 0.47 0.45 0.53 0.85 0.93 0.81 0.02 0.34 0.39 0.55 0.44 0.95 0.97
 0.78 0.37 0.79 0.02 0.37 0.42 0.16 0.17 0.27 0.11 0.17 0.23 0.64 0.34 0.35 0.43
 0.94 0.78 0.22 0.18 0.18 0.52 0.86 0.24 0.08 0.51 0.4 0.06 0.66 0.04 0.43 0.32
 0.58 0.88 0.56 0.98 0.67 0.05 0.43 0.15 0.47 0.06 0.96 0.57 0.47 0.45 0.85 0.5
 0.33 0.23 0.23 0.34 0.21 0.07 0.3 0.15 0.45 0.94 0.05 0.16 0.55 0.37 0.9 0.68
 0.66 0.27 0.33 0.37 0.99 0.58 0.51 0.15 0.62 0.57 0.84 0.32 0.29 0.88 0.27 0.37
 0.23 0.19 0.89 0.87 0.57 0.14 0.15 0.95 0.78 0.11 0.19 0.63 0.58 0.33 0 0.59
 0.4 0.87 0.3 0.68 0.12 0.16 0.02 0.87 0.64 0.96 0.28 0.67 0.44 0.6 0.47 0.74
 0.64 0.91 0.59 0.95 0.05 0.49 0.73 0.74 0.25 0.62 0.69 0.01 0.04 0.9 0.37 0.78

Variant No./ Random values

353 354 355 356 357 358 359 360 361 362 363 364 365 366 367 368
 0.19 0.86 0.83 0.59 0.38 0.14 0.65 0.74 0.12 0.68 0.04 0.92 0.56 0.48 0.79 0.85
 0.56 0.14 0.53 0.72 0.34 0.78 0.67 0.33 0.03 0.9 0.46 0.88 0.38 0.34 0.36 0.34
 0.65 0.53 0.79 0.49 0.86 0.41 0.92 0.7 0.56 0.38 0.72 0.93 0.17 0.48 0.72 0.33
 0.2 0.83 0.76 0.01 0.12 0.3 0.29 0.91 0.13 0.67 0.93 0.86 0.27 0.08 0.94 0.38



0.79 0.93 0.62 0.01 0.62 0.95 0.15 0.41 0.33 0.71 0.42 0.48 0.92 0.83 0.0
 0.01 0.26 0.9 0.14 0.75 0.46 0.68 0.47 0.65 0.35 0.76 0.16 0.47 0.73 0.79
 0.75 0.2 0.04 0.9 0.75 0.71 0.55 0.52 0.78 0.19 0.65 0.36 0.21 0.32 0.39 0.26
 0.4 0.61 0.6 0.13 0.63 0.58 0.15 0.59 0.07 0.42 0.2 0.2 0.2 0.31 0.87 0.27
 0.76 0.05 0.27 0.72 0.19 0 0.55 0.61 0.48 0.42 0.55 0.51 0.87 0.92 0.53 0.03
 0.43 0.51 0.39 0.84 0.42 0.53 0.22 0.34 0.15 0.76 0.23 0.36 0.1 0.64 0.25 0.06

Variant No./ Random values

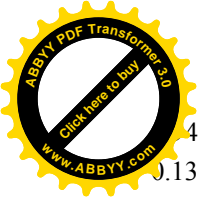
369 370 371 372 373 374 375 376 377 378 379 380 381 382 383 384
 0.39 0.04 0.97 0.5 0.08 0.65 0.62 0.71 0.09 0.53 0.59 0.19 0.46 0.58 0.97 0.51
 0.41 0.31 0.03 0.48 0.22 0.76 0.93 0.06 0.24 0.74 0.35 0.36 0.32 0.56 0.91 0.6
 0.78 0.15 0.47 0.81 0.81 0.15 0.28 0.43 0.66 0.79 0.57 0.06 0.11 0.08 0.61 0.53
 0.31 0.5 0.44 0.52 0.12 0.74 0.73 0.92 0.45 0.44 0.94 0.54 0.23 0.68 0.28 0.86
 0.06 0.13 0.4 0.84 0.14 0.86 0.37 0.76 0.7 0.09 0.61 0.2 0.71 0.51 0.24 0.91
 0.4 0.43 0.02 0.72 0.53 0.86 0.07 0.64 0.82 0.36 0.34 0.14 0.33 0.46 0.23 0.51
 0.89 0.75 0.76 0.64 0.52 0.16 0.41 0.37 0.67 0.96 0.9 0.31 0.49 0.5 0.19 0.1
 0.85 0.75 0.98 0.44 0.23 0.91 0.98 0.62 0.91 0.64 0.21 0.93 0.99 0.49 0.07 0.23
 0.62 0.34 0.64 0.68 0.44 0.11 0.73 0.94 0.03 0.26 0.59 0.18 0.4 0.44 0.37 0.8
 0.51 0.33 0.38 0.94 0.52 0.57 0.42 0.39 0.95 0.08 0.29 0.65 0.91 0.22 0.85 0.08

Variant No./ Random values

385 386 387 388 389 390 391 392 393 394 395 396 397 398 399 400
 0.55 0.58 0.21 0.57 0.25 0.03 0.1 0.71 0.25 0.7 0.12 0.66 0.83 0.02 0.4 0.29
 0.29 0.52 0.52 0.2 0.11 0.87 0.26 0.76 0.75 0.62 0.2 0.41 0.54 0.2 0.51 0.61
 0.84 0.16 0.34 0.84 0.75 0.65 0.16 0.99 0.98 0.11 0.61 0.41 0.01 0 0.29 0.96
 0.07 0.83 0.86 0.9 0.92 0.91 0.6 0.3 0.28 0.84 0 0.26 0.91 0.04 0.14 0.07
 0.92 0.88 0.62 0.15 0.07 0.84 0.24 0.51 0.67 0.09 0.08 0.7 0 0.69 0.92 0.82
 0.12 0.06 0.6 0.41 0.83 0.71 0.8 0.65 0.35 0.56 0.72 0.52 0.53 0.25 0.67 0.53
 0.28 0.61 0.29 0.1 0.42 0.48 0.77 0.61 0.82 0.58 0.29 0.76 0.51 0.57 0.95 0.98
 0.47 0.03 0.56 0.22 0.26 0.29 0.34 0.86 0 0.34 0.15 0.87 0.22 0.98 0.05 0.34
 0.98 0.96 0.5 0.22 0.62 0.91 0.74 0.87 0.88 0.2 0.27 0.34 0.2 0.92 0.22 0.24
 0.53 0.39 0.85 0.62 0.64 0.76 0.69 0.14 0.9 0.55 0.62 0.84 0.25 0.03 0.91 0.27

Variant No./ Random values

401 402 403 404 405 406 407 408 409 410 411 412 413 414 415 416
 0.57 0.71 0.02 0.84 0.02 0.79 0.98 0.06 0.63 0.65 0.82 0.54 0.88 0.92 0.64 0.88
 0.02 0.54 0.56 0.61 0.01 0.72 0.96 0.7 0.26 0.64 0.07 0.65 0.59 0.04 0.29 0.09



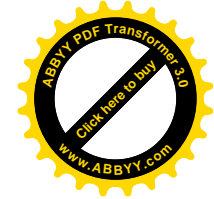
4 0.56 0.81 0.5 0.65 0.26 0.53 0.05 0.37 0.18 0.29 0.41 0.27 0.03 0.36 0.93
 0.13 0.78 0.51 0.78 0.6 0.9 0.4 0.7 0.86 0.67 0.11 0.49 0.65 0.58 0.34 0.34
 0.34 0.76 0.93 0.38 0.57 0.81 0.71 0.13 0.86 0.45 0.58 0.73 0.67 0.81 0.23 0.01
 0.45 0.87 0.68 0.71 0.26 0.6 0.34 0.89 0.13 0.9 0.95 0.62 0 0.99 0.39 0.36
 0.1 0.31 0.02 0.91 0.61 0.61 0.52 0.88 0.13 0.84 0.37 0.9 0.99 0.04 0.23 0.17
 0.47 0.33 0.63 0.94 0.8 0.45 0.75 0.93 0.14 0.93 0.14 0.05 0.29 0.76 0.34 0.75
 0.74 0.81 0.19 0.35 0.67 0.09 0.11 0.01 0.37 0.75 0.17 0.21 0 0.8 0.31 0.55
 0.9 0.24 0.85 0.3 0.9 0.66 0.92 0.03 0.76 0.71 0.92 0.2 0.33 0.22 0.9 0.94

Variant No./ Random values

417 418 419 420 421 422 423 424 425 426 427 428 429 430 431 432
 0.33 0.46 0.76 0.85 0.14 0.22 0.14 0.47 0.73 0.79 0.39 0.37 0.51 0.7 0.34 0.43
 0.66 0.19 0.91 0.04 0.03 0.37 0.51 0.11 0.73 0.54 0.71 0.91 0.85 0.5 0.46 0.44
 0.9 0.26 0.36 0.55 0.12 0.81 0.62 0.28 0.82 0.44 0.62 0.57 0.59 0.16 0.33 0.3
 0.39 0.1 0.72 0.25 0.38 0.37 0.42 0.18 0.21 0.4 0.88 0.35 0.08 0.65 0.73 0.91
 0.77 0.15 0.09 0.68 0.28 0.87 0.47 0.82 0.65 0.69 0.95 0.99 0.57 0.44 0.9 0.66
 0.17 0.58 0.34 0.41 0.37 0.52 0.23 0.97 0.09 0.68 0.34 0.08 0 0.53 0.55 0.98
 0.49 0.17 0.54 0.17 0.38 0.18 0.83 0.99 0.94 0.46 0.97 0.48 0.67 0.62 0.65 0.51
 0.65 0.82 0.76 0.58 0.48 0.35 0.88 0.45 0.31 0.42 0.77 0.56 0.87 0.9 0.02 0.9
 0.95 0.17 0.02 0.83 0.52 0.97 0.16 0.34 0.45 0.62 0.12 0.96 0.4 0.43 0.52 0.31
 0.17 0.6 0.06 0.65 0.1 0.12 0.41 0.2 0.06 0.59 0.75 0.58 0.51 0.27 0.61 0.78

Variant No./ Random values

433 434 435 436 437 438 439 440 441 442 443 444 445 446 447 448
 0.58 0.38 0.29 0.2 0.41 0.97 0.48 0.44 0.23 0.6 0.8 0.07 0.19 0.3 0.45 0.76
 0.18 0.93 0.23 0.49 0.22 0.92 0.79 0.65 0.01 0.98 0.75 0.18 0.72 0.12 0.72 0.67
 0.5 0.79 0.81 0.25 0.54 0.7 0.95 0.89 0.04 0.55 0.63 0.57 0.92 0.12 0.21 0.03
 0.33 0.46 0.69 0.74 0.99 0.23 0.56 0.3 0.25 0.49 0.47 0.8 0.24 0.9 0.11 0.41
 0.95 0.21 0.23 0.82 0.81 0.53 0.09 0.11 0.4 0.79 0.07 0.38 0.6 0.25 0.15 0.22
 0.74 0.29 0.95 0.81 0.8 0.72 0.47 0.16 0.25 0.91 0.66 0.85 0.45 0.13 0.33 0.12
 0.39 0.48 0.04 0.94 0.7 0.79 0.11 0.91 0.53 0.26 0.73 0.43 0.02 0.82 0.44 0.18
 0.6 0.41 0.42 0.63 0.63 0.95 0.48 0 0.04 0.48 0 0.26 0.7 0.49 0.62 0.48
 0.2 0.17 0.92 0.89 0.64 0.76 0.69 0.75 0.83 0.18 0.32 0.71 0.31 0.42 0.51 0.7
 0.29 0.69 0.23 0.48 0.89 0.62 0.76 0.68 0.44 0.03 0.23 0.26 0.09 0.27 0.52 0.49



Ольга Ігорівна Доукіна

**ПОБУДОВА І ДОСЛІДЖЕННЯ
 МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ
 ЗАЛЕЖНОСТІ МАГНІТНОГО МОМЕНТУ
 ЗЕМЛІ ВІД ШИРОТИ МЕТОДОМ
 СТАТИСТИЧНИХ ВИПРОБУВАНЬ МОНТЕ
 КАРЛО
 Апроксимація поліномом третього степеня**

Модель ПГБ10-206

Книга написана за матеріалами роботи наукової фізико-математичної школи МЕНУ

**Науковий керівник – кандидат технічних наук,
 доцент Літнарівч Руслан Миколайович**

*Комп'ютерний набір, верстка – дизайн у
 редакторі Microsoft® Office 2003® Word*

О.І.Доукіна

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
 МІЖНАРОДНИЙ ЕКОНОМІКО-ГУМАНІТАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
 Ім.акад. С.Дем'янчука**

**Кафедра Математичного моделювання
 33027, м.Рівне, Україна
 вул.акад. С.Дем'янчука, 4, корпус 1
 Телефон: (+00380) 362 23-73-09
 Факс: (+00380) 362 23-01-86
 E-mail: mail@regi.rovno.ua**